*Postverlagsort Berlin*

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE† TÜBINGEN

R. NEVANLINNA HELSINKI

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

77. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 5. OKTOBER 1961)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1961

Math. Z.

Die **Mathematische Zeitschrift**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

---

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole *o* und *O*, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

Manuskripte nehmen entgegen:

*R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.*
*H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.*

**Springer-Verlag OHG**

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723

---

77. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

GRÖBNER, W., Über das Umkehrproblem der Abelschen Integrale . . . . . 101
TILLMANN, H. G., Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen . . . . . 106
SEIFERT, H., Zum Satz von O. Bonnet über den Durchmesser einer Eifläche . . . 125
HERRMANN, O., Geodätische Untermannigfaltigkeiten der Dodekaederräume . . . 131
KRULL, W., Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern . . . . . 135
ATIYAH, M. F., und F. HIRZEBRUCH, Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen . . . . . 149
KNESER, M., Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen . . . . . 188

GRÖBNER, W.
Math. Zeitschr. 77, 101–105 (1961)

# Über das Umkehrproblem der Abelschen Integrale

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

W. GRÖBNER

1. Die Umkehrung eines Abelschen Integrals war seit der Zeit EULERS ein Problem, das viele Mathematiker angezogen und zu großartigen Leistungen, besonders zur Theorie der Abelschen Funktionen angeregt hat. Es handelt sich hier um Integrale der Gestalt

$$u = \int_{(x,y)}^{(X,Y)} \varphi(x,y)\,dx, \tag{1}$$

in denen der Integrand $\varphi(x,y)$ eine rationale Funktion der Variablen $x, y$, und zwar $y$ eine algebraische Funktion von $x$ bedeutet, die durch eine irreduzible algebraische Gleichung

$$f(x,y) = 0 \tag{2}$$

definiert ist. Das Integral ist auf der zur Gl. (2) gehörenden Riemannschen Fläche längs eines Weges $C$ zu erstrecken, welcher die beiden Punkte mit den Koordinaten $(x,y)$ und $(X,Y)$ verbindet. (Wir werden im folgenden daran festhalten, die unteren Grenzen der Integrale mit kleinen, die oberen Grenzen mit großen Buchstaben zu bezeichnen.) Der Wert des Integrals ändert sich bei stetiger Änderung des Weges $C$ nicht, solange kein Pol des Integranden überstrichen wird; fügt man zu $C$ einen geschlossenen Weg hinzu, welcher einen solchen Pol umschließt oder sich auf der Riemannschen Fläche nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt, so nimmt $u$ im allgemeinen um eine sogenannte Periode zu.

Betrachtet man daher eine genügend kleine Umgebung des (regulär vorausgesetzten) Anfangspunktes $(x,y)$, so ist $u$ eine eindeutige analytische Funktion der oberen Grenze $(X,Y)$, also letztlich der Variablen $X$; wenn man dagegen diese Beschränkung aufhebt und die Integrationswege sich beliebig über die Riemannsche Fläche erstrecken dürfen, so wird $u$ eine unendlich vielwertige Funktion von $X$, und zwar erhält man alle Funktionswerte für dieselbe Stelle $(X,Y)$, wenn man beliebige Vielfache der für das Integral geltenden Perioden hinzufügt. Die Anzahl $2p$ der linear unabhängigen Perioden (abgesehen von etwaigen logarithmischen Perioden, die von logarithmischen Stellen des Integranden herrühren) hängt vom Geschlecht $p$ der Gl. (2) bzw. der zugehörigen Riemannschen Fläche ab.

Die Umkehrung des Integrals (1), d.h. die Lösung der Aufgabe, bei festgehaltenen unteren Grenzen $(x,y)$ die Koordinaten der oberen Grenze $(X,Y)$ für einen gegebenen Wert $u$ zu berechnen, führt auf eine Darstellung

$$X = g(u), \qquad Y = h(u) \tag{3}$$

durch analytische Funktionen von $u$, welche sich für $u=0$ auf die Anfangswerte reduzieren:

$$x=g(0), \qquad y=h(0), \tag{3a}$$

die Gl. (2) identisch erfüllen:

$$f(g(u), h(u))=0 \qquad \text{(identisch in } u\text{)} \tag{3b}$$

und $2p$ linear unabhängige Perioden $\omega$ haben:

$$g(u+\omega)=g(u), \qquad h(u+\omega)=h(u). \tag{3c}$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß eine einwertige (nicht konstante) analytische Funktion einer komplexen Variablen höchstens zwei linear unabhängige Perioden haben kann[1]; daher können die Funktionen (3) nur in den Fällen $p=0, 1$ eindeutige analytische Funktionen sein. Diese Umkehrfunktionen sind in der Tat sehr interessante und wichtige Funktionen, nämlich für $p=0$ die trigonometrischen Funktionen mit einer Periode, für $p=1$ die elliptischen Funktionen mit zwei unabhängigen Perioden.

Es ist daher verständlich, daß sich die Bemühungen der Mathematiker schon vor 150 Jahren darauf konzentrierten, ähnliche Umkehrfunktionen auch in den Fällen $p>1$ zu konstruieren und deren Eigenschaften zu erforschen. Aber es müssen dann notwendig unendlich vielwertige Funktionen sein. JACOBI bezeichnete solche Funktionen als absurd[2] und formulierte, um mit einwertigen Funktionen durchzukommen, sein berühmtes Umkehrproblem. Aber schon sein Zeitgenosse GÖPEL erhob gegen die Behauptung der Absurdität unendlich vielwertiger Funktionen Einspruch. In der Folge wurden eingehende Untersuchungen über die Eigenschaften dieser Umkehrfunktionen und der durch sie bewirkten konformen Abbildungen, vor allem von WIRTINGER, angestellt, auf die hier aber nicht näher einzugehen ist[3]. Das Thema der vorliegenden Arbeit ist, zu zeigen, wie man mit Hilfe der Lie-Reihen[4] sehr rasch und einfach eine Darstellung der Umkehrfunktion eines einzelnen Integrals gewinnen und mit deren Hilfe weiter operieren kann; ferner soll dieselbe Methode auch für die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems angewandt werden.

2. Um die Umkehrfunktionen des Integrals (1) zu gewinnen, bilden wir zunächst den Differentialoperator

$$D=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{f_x}{\varphi f_y}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4}$$

[1] Allgemeiner: Eine einwertige analytische Funktion von $p$ komplexen Variablen kann höchstens $2p$ linear unabhängige Perioden haben. Siehe darüber: F. CONFORTO, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, S. 5ff. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.

[2] Vgl. Encyklopädie der Math. Wissensch., II B7. Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen. Von A. KRAZER und W. WIRTINGER. Leipzig 1920. Insbesondere Nr. 4: Umkehrung eines einzelnen Abelschen Integrals.

[3] Vgl. den oben zitierten Enzyklopädie-Artikel.

[4] Hinsichtlich der allgemeinen Theorie der Lie-Reihen verweise ich auf mein Buch: Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. Deutscher Verlag d. Wissensch., Berlin 1960.

wo $\varphi$ die im Integranden von (1) auftretende rationale Funktion, $f_x$ und $f_y$ die partiellen Ableitungen des Polynoms $f(x,y)$ in (2) bedeuten. Mit Ausnahme derjenigen Punkte $(x,y)$ der Riemannschen Fläche, in denen $\varphi$ oder $\varphi f_y$ verschwindet, ist der Operator $D$ überall holomorph; bezeichnet also $(x,y)$ einen solchen für $D$ regulären Punkt, so können wir die Lie-Reihen bilden:

$$X = e^{uD}x = g(u), \qquad Y = e^{uD}y = h(u); \tag{5}$$

sie haben als Potenzreihen in $u$ einen positiven Konvergenzradius und stellen innerhalb ihres Konvergenzkreises holomorphe Funktionen von $u$ dar, die auf der Riemannschen Fläche mit Ausnahme der eben besprochenen Ausnahmspunkte überall analytisch fortgesetzt werden können. Diese Funktionen befriedigen die Gl. (2), denn mit Rücksicht auf den für Lie-Reihen geltenden Vertauschungssatz findet man:

$$f(X,Y) = f(e^{uD}x, e^{uD}y) = e^{uD}f(x,y) = f(x,y) = 0;$$

denn wegen $Df = 0$ reduziert sich die Reihe $e^{uD}f$ auf das erste Glied $f(x,y)$, und dieses verschwindet, weil der Anfangspunkt voraussetzungsgemäß auf unserer Riemannschen Fläche liegt, also die Gl. (2) befriedigt. Daher liefern die Funktionen (5), die sich für $u=0$ auf die Anfangswerte $(x,y)$ reduzieren, eine Parameterdarstellung der Riemannschen Fläche in der Umgebung des Anfangspunktes, die analytisch über die ganze Riemannsche Fläche mit Ausnahme der Ausnahmspunkte fortgesetzt werden kann.

Wenn wir die erste Funktion nach $u$ differenzieren, so erhalten wir mit Rücksicht auf den Vertauschungssatz:

$$\frac{dX}{du} = e^{uD}(Dx) = e^{uD}\left(\frac{1}{\varphi(x,y)}\right) = \frac{1}{\varphi(X,Y)},$$

oder

$$du = \varphi(X,Y)\,dX. \tag{6}$$

Integriert man (6) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $u=0$ an der Stelle $(x,y)$, so erhält man das Abelsche Integral (1).

Satz. *Die mit dem Operator* (4) *gebildeten Lie-Reihen* (5) *stellen die Umkehrfunktionen des Integrals* (1) *dar. Sie können überall auf der Riemannschen Fläche von* (2), *ausgenommen diejenigen Punkte, in denen* $\varphi$ *oder* $\varphi f_y$ *verschwindet, analytisch fortgesetzt werden; sie lassen alle Perioden zu, die zum Integral* (1) *gehören, und sind daher im allgemeinen unendlich vielwertig; sie liefern gleichzeitig auch eine Parameterdarstellung der Riemannschen Fläche, d.h. der algebraischen Kurve* (2).

3. Es sei nun folgendes, dem Jacobischen nahestehende Umkehrproblem gestellt:

$$\begin{cases} u_1 = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(X_1,Y_1)} \varphi_1(x,y)\,dx + \int\limits_{(x_2,y_2)}^{(X_2,Y_2)} \varphi_1(x,y)\,dx, \\ u_2 = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(X_1,Y_1)} \varphi_2(x,y)\,dx + \int\limits_{(x_2,y_2)}^{(X_2,Y_2)} \varphi_2(x,y)\,dx; \end{cases} \tag{7}$$

$\varphi_1(x,y)$ und $\varphi_2(x,y)$ seien rationale Funktionen der Variablen $x, y$, welche die Gl. (2) erfüllen müssen. Die Integrale sind auf der zugehörigen Riemannschen Fläche zu erstrecken längs eines Weges, welcher die untere Grenze mit der oberen Grenze verbindet; die Wege sind beliebig, müssen aber in zwei untereinanderstehenden Integralen gleich gewählt werden. Ändert man einen Weg ab, indem man einen geschlossenen Periodenweg hinzufügt, so nehmen $u_1$ und $u_2$ simultan um entsprechende Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$ zu (Simultanperiode).

Es ist die Aufgabe gestellt, bei festen unteren Grenzen $(x_k, y_k)$ und gegebenen Werten $u_1, u_2$ die Koordinaten $(X_k, Y_k)$ der oberen Grenzen zu berechnen.

Zur Vereinfachung führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\varphi_{ik} = \varphi_i(x_k, y_k) \qquad (i, k = 1, 2) \tag{8}$$

und machen ferner die Voraussetzung:

$$\delta = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} \neq 0. \tag{9}$$

Ferner bedeute

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{f_x(x_k, y_k)}{f_y(x_k, y_k)} \frac{\partial}{\partial y_k} \qquad (k = 1, 2) \tag{10}$$

und

$$\Delta_1 = \frac{\varphi_{22}}{\delta} D_1 - \frac{\varphi_{21}}{\delta} D_2, \qquad \Delta_2 = \frac{-\varphi_{12}}{\delta} D_1 + \frac{\varphi_{11}}{\delta} D_2; \tag{11}$$

diese beiden Operatoren sind miteinander vertauschbar:

$$\Delta_1 \Delta_2 = \Delta_2 \Delta_1, \tag{11a}$$

wie man durch direktes Nachrechnen bestätigen kann. Mit diesen Operatoren bilden wir die Lie-Reihen:

$$\left.\begin{aligned} X_k &= e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2} x_k = g_k(x_1, y_1; x_2, y_2; u_1, u_2) \\ Y_k &= e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2} y_k = h_k(x_1, y_1; x_2, y_2; u_1, u_2) \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2). \tag{12}$$

Sie liefern analytische Funktionen der komplexen Variablen $u_1, u_2$, deren Abhängigkeit von den Anfangswerten $x_k, y_k$ wir in der obigen Schreibweise zur Erinnerung gebracht haben. Mit Rücksicht auf (11a) dürfen wir diese Reihen nach $u_1, u_2$ differenzieren und den Vertauschungssatz anwenden; das gibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial u_1} &= e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2}(\Delta_1 x_1) = \frac{\varphi_{22}(X, Y)}{\delta(X, Y)}, \\
\frac{\partial X_1}{\partial u_2} &= e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2}(\Delta_2 x_1) = \frac{-\varphi_{12}(X, Y)}{\delta(X, Y)}, \\
\frac{\partial X_2}{\partial u_1} &= e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2}(\Delta_1 x_2) = \frac{-\varphi_{21}(X, Y)}{\delta(X, Y)}, \\
\frac{\partial X_2}{\partial u_2} &= e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2}(\Delta_2 x_2) = \frac{\varphi_{11}(X, Y)}{\delta(X, Y)};
\end{aligned}$$

die rechts stehenden Funktionen sind in den Variablen $X_k, Y_k$ zu schreiben. Daraus folgt für die Jacobische Matrix:

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} \varphi_{22}, & -\varphi_{12} \\ -\varphi_{21}, & \varphi_{11} \end{pmatrix} \tag{13}$$

und für deren Reziproke:

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(X_1, X_2)} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12} \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22} \end{pmatrix}. \tag{13a}$$

Diese Relationen können wir auch so schreiben:

$$\begin{cases} du_1 = \varphi_1(X_1, Y_1)\, dX_1 + \varphi_1(X_2, Y_2)\, dX_2, \\ du_2 = \varphi_2(X_1, Y_1)\, dX_1 + \varphi_2(X_2, Y_2)\, dX_2; \end{cases} \tag{14}$$

integriert man diese Gleichungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (für $u_1 = u_2 = 0$ ist $X_k = x_k$, $Y_k = y_k$), so erhält man genau die Integrale (7).

*Die Funktionen* (12) *sind also die Umkehrfunktionen des Umkehrproblems* (7).

Bei Vertauschung der Indizes $k = 1, 2$ untereinander gehen die Operatoren $\Delta_1$ und $\Delta_2$ in sich über. Ist daher $F(X_k, Y_k)$ eine symmetrische Funktion, die gegenüber einer Vertauschung der beiden Indizes $k$ invariant ist, so gilt zunächst die Darstellung dieser Funktion durch eine Lie-Reihe:

$$F(X_1, Y_1; X_2, Y_2) = e^{u_1\Delta_1 + u_2\Delta_2} F(x_1, y_1; x_2, y_2); \tag{15}$$

hier ist nun die rechte Seite invariant gegenüber einer Vertauschung der unteren Grenzen $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$; man darf also die Zuordnung der unteren zu den oberen Grenzen der Integrale (7) beliebig permutieren, ohne die Gleichungen zu ändern; das ist eine Tatsache, die man leicht auch durch direkte Überlegung bestätigen kann.

Es ist nicht schwierig, das obige Resultat auf $p$ Gleichungen mit $p$ Integralen zu verallgemeinern. Beim Jacobischen Umkehrproblem insbesondere ist $p$ das Geschlecht der Kurve (2), und als Integrale werden $p$ linear unabhängige Integrale 1. Gattung eingesetzt; in diesem Falle kann die Umkehrung mit eindeutigen meromorphen Funktionen geleistet werden[5]).

[5]) Vgl. das oben zitierte Buch von F. Conforto. Diese klassische Lösung des Jacobischen Umkehrproblems ist insoferne vorteilhafter, als sie — die Kenntnis der Perioden vorausgesetzt — die Umkehrfunktionen als Quotienten von ganzen Funktionen, also in ihrem gesamten Existenzbereich darstellt. Die oben mitgeteilten Umkehrungen sind dagegen viel allgemeiner anwendbar und setzen die Kenntnis der Perioden nicht voraus, aber sie liefern zunächst nur ein Funktionselement, das noch analytisch über den Existenzbereich der Funktionen fortgesetzt werden muß.

*Innsbruck, Mathematisches Institut der Universität*

*(Eingegangen am 10. April 1961)*

TILLMANN, H. G.
Math. Zeitschr. 77, 106—124 (1961)

# Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

HEINZ GÜNTHER TILLMANN

**Einleitung.** Die Grundidee der Distributionstheorie von L. SCHWARTZ [4] war es, die stetige Funktion $f(x)$ mit dem linearen Funktional $f[\varphi] = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx$ auf einem geeigneten Funktionenraum $\mathscr{D}$ zu identifizieren, wobei in $\mathscr{D}$ eine solche Topologie eingeführt wurde, daß diese Funktionale stetig sind. Die stetigen linearen Funktionale $u$ auf $\mathscr{D}$, eben die Distributionen, stellen dann eine sehr brauchbare Verallgemeinerung der stetigen Funktionen dar, und die wichtigsten Operationen der Analysis lassen sich auf diese allgemeineren Gebilde in einfacher Weise übertragen.

G. KÖTHE [1, 2] hat nun gezeigt, daß die stetigen Linearfunktionen $u$ auf dem Raum $\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{R}})$ der auf der geschlossenen reellen Geraden holomorphen und in $\infty$ verschwindenden Funktionen umkehrbar eindeutig als „Randverteilung" eines Paares $\{u_1, u_2\}$ in oberer bzw. unterer Halbebene holomorpher Funktionen $u_i$ darstellbar ist. Das gilt also insbesondere auch für die durch stetige, summierbare Funktionen $f(x)$ definierten Funktionale $f[\varphi] = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx$. Es ist also eine recht enge Beziehung zwischen den Distributionen auf $\boldsymbol{R}$ und den Randverteilungen auf $\boldsymbol{R}$ von im Komplement von $\overline{\boldsymbol{R}}$ holomorphen Funktionen zu erwarten.

Nun zeigte schon G. KÖTHE in [2], daß im Falle einer endlichen, analytischen Jordan-Kurve $C$ jede Distribution $u$ auf $C$ als Randverteilung einer im Komplement von $C$ holomorphen Funktion $\tilde{u}$ aufgefaßt werden kann.

Vom Verfasser wurde in [5], I gezeigt, daß auch für analytische Jordan-Kurven $C$ durch den Punkt $\infty$ jedenfalls jede Distribution $u$ mit kompaktem Träger $K$ als Randverteilung einer im Komplement von $K$ holomorphen und in $\infty$ verschwindenden Funktion $\tilde{u}$ aufgefaßt werden kann, und die dabei auftretenden Funktionen wurden durch ihr Wachstumsverhalten charakterisiert:

$$\text{(I)} \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M \cdot \varrho(z, K)^{-n} \quad \text{in} \quad \{\varrho(z, K) \leqq 1\}; \quad \varrho(z, K) = \inf_{z' \in K} |z - z'|.$$

Eine entsprechende Abschätzung charakterisiert im Falle mehrerer Variablen diejenigen holomorphen Funktionen, welche Distributionen mit kompaktem Träger als Randverteilung besitzen.

In [5], II wurde dann diese Identifizierung von Distributionen mit Randverteilungen ausgedehnt auf die Distributionenräume $\mathscr{D}_{L^p}(\boldsymbol{R}^N)$, $1 < p < \infty$ (vgl.

[4], Bd. 2, S. 55ff.). Insbesondere gilt für Distributionen $u = D^k g$, die $k$-te Ableitung einer Funktion $g(x) \in \boldsymbol{L}^2$ sind, eine Abschätzung der Indikatrix $\tilde{u}$:

$$(II) \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M \cdot |y|^{-k-\frac{1}{2}}, \quad |y| = |\operatorname{Im}(z)| = \varrho(z, \boldsymbol{R})$$

und weiterhin auch (zur analogen Frage für $\mathscr{D}'_{L^p}$ vgl. [6]):

$$(IIa) \qquad \|u(x+iy)\|_{L^2} \leqq M \cdot |y|^{-k}.$$

Für den Fall $k = 0$, also $u \in \boldsymbol{L}^2$ gilt für die Konvergenz gegen den Rand

$$(III) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{u}(x+i\varepsilon) = \tilde{u}(x+i0) = u_+(x) \in \boldsymbol{L}^2 \\ \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{u}(x-i\varepsilon) = \tilde{u}(x-i0) = u_-(x) \in \boldsymbol{L}^2 \\ \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \{\tilde{u}(x+i\varepsilon) - u(x-i\varepsilon)\} = u_+(x) - u_-(x) = u(x), \end{cases}$$

wobei die Konvergenz im Sinne der Normtopologie von $\boldsymbol{L}^2$ erfolgt. Diese Resultate führen nun zur Darstellung weiterer Klassen und schließlich aller Distributionen durch „Randwerte" holomorpher Funktionen, nämlich als Limites der Form (III), wobei die Konvergenz im Sinne der starken Topologie der betreffenden Distributionenräume erfolgt.

Zunächst entsprechen den gemäßigten Distributionen $u$ holomorphe Funktionen, deren Wachstumsverhalten durch eine Abschätzung

$$(IV) \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M(|z|) \cdot |y|^{-n}, \quad M(|z|) = M_0(1+|z|^2)^m, \quad y = \operatorname{Im}(z),$$

charakterisiert ist (§ 1).

Dabei ist dann wegen (III) $\tilde{u}$ durch $u$ nur bis auf eine ganze Funktion, die (IV) genügt, d.h. bis auf ein Polynom, festgelegt. Der Raum $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R})$ der gemäßigten Distributionen ist also dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_L(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/\Lambda$, natürlich isomorph, wobei $\boldsymbol{H}_L(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ der Raum der Funktionen, die (IV) genügen, und $\Lambda$ der Teilraum der Polynome ist.

Die Distributionen endlicher Ordnung werden charakterisiert durch die holomorphen Funktionen mit

$$(V) \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M(|z|) \cdot |y|^{-n}, \quad z = x+iy,$$

wobei $M(r)$ eine beliebige stetige Funktion ist. Der Raum der Distributionen endlicher Ordnung wird natürlich isomorph dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_P(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/H(\boldsymbol{C})$ des Raumes der durch (V) charakterisierten holomorphen Funktion nach dem Teilraum der ganzen Funktionen (§ 2).

Damit münden diese Untersuchungen ein in die Theorie der Hyperfunktionen von M. Sato [3] in der gerade solche Klassen untersucht werden.

Aus dem Satoschen Beweis für das „Lokalisationsprinzip", das ebenso wie für Distributionen auch für Hyperfunktionen gilt, läßt sich dann (§ 3) die Aussage gewinnen, daß beliebige Distributionen $u$ charakterisiert werden können durch holomorphe Funktionen $\tilde{u}(z)$ mit

$$(VI) \qquad |\tilde{u}(z)| \leqq M(|z|) \cdot |y|^{-n(|z|)}, \quad 0 < |\operatorname{Im}(z)| \leqq 1,$$

wobei $M(r)$, $n(r)$ geeignete stetige Funktionen sind. Für jede durch (VI) charakterisierte Funktion $\tilde{u}(z)$ gilt für die Konvergenz gegen den Rand wieder: $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{u}(x \pm i\varepsilon) = u_{\pm}(x) \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$ im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{D}'$. Der Distributionenraum $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$ ist also natürlich isomorph zum Quotientenraum $\boldsymbol{H}_{(\mathrm{VI})}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$ und die Abbildung $T_\varepsilon: \tilde{u} \to \tilde{u}_\varepsilon(x) = \tilde{u}(x+i\varepsilon) - \tilde{u}(x-i\varepsilon)$ liefert eine Approximation von $u$ durch eine Schar $\tilde{u}_\varepsilon$ von holomorphen Funktionen, welche auch vom Parameter $\varepsilon$ holomorph abhängen. Die Distribution $u$ selbst erscheint so als die „analytische Fortsetzung" für $\varepsilon \to 0$.

Diese Tatsache ermöglicht nun eine über die übliche Distributionstheorie hinausreichende Behandlung der Multiplikation. Man setze $u \cdot v = w$, wenn

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon[\varphi] = \lim \int u_\varepsilon(x)\, v_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx$$
$$= w[\varphi] = \lim \int w_\varepsilon(x)\, \varphi(x)\, dx$$

ist, oder allgemeiner wenn der endliche Teil $Pf\, u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon[\varphi]$ (im Sinne von J. HADAMARD) existiert und mit $w[\varphi]$ übereinstimmt.

Damit erhält man eine Multiplikation, die für stetige Funktionen mit der klassischen übereinstimmt, aber z. B. auch für Dirac-Distributionen und Pseudofunktionen definiert ist. Wegen des bekannten Beispiels von L. SCHWARTZ $(\delta \cdot (x \cdot Pf\, x^{-1}) = \delta;\ (\delta \cdot x) \cdot Pf\, x^{-1} = 0)$ ist die Multiplikation in dem hier zugänglichen Rahmen natürlich auch nicht assoziativ, jedoch kommutativ und es gilt die Produktregel der Differentiation. Insbesondere wird $\delta(x-a) \cdot \delta(x-b) = 0$ sowohl für $a \neq b$, wie für $a = b$.[1])

**Bezeichnungen.** Es sei $\boldsymbol{R}$ der reelle, $\boldsymbol{C}$ der komplexe Zahlkörper, $\Omega$ die Riemannsche Zahlenkugel, $\boldsymbol{R}^N$ bzw. $\boldsymbol{C}^N$ der $N$-dimensionale Zahlenraum aller Punkte $x = (x_1, \ldots, x_N)$ mit $x_j \in \boldsymbol{R}$ bzw. $z = (z_1, \ldots, z_N)$ mit $z_j \in \boldsymbol{C}$. Für ganzzahlige $m_j$ und $m = (m_1, \ldots, m_N)$ ist $\varphi^{(m)}(z) = \dfrac{\partial^{|m|}}{\partial z^m}\varphi(z) = \dfrac{\partial^{m_1+\cdots+m_N}}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_N^{m_N}}\varphi(z)$ und $\psi = \varphi^{(-m)}$ bezeichnet ein $m$-faches Integral von $\varphi$, d.h. $\psi^{(m)} = \varphi$. $|m| = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ ist die Ordnung, $\mathrm{Rg}(m) = \sup_{j=1,\ldots,N} m_j$ der Rang der Ableitung $\varphi^{(m)}$ bzw. des Operators $\dfrac{\partial^{|m|}}{\partial z^m}$.

Für $x = (x_1, \ldots, x_N)$ sei $x_{[j]} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)$, entsprechend für ganzzahlige Vektoren $m = (m_1, \ldots, m_N)$ oder $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$, wobei wir $\sigma_j$ für die Zahlen $\pm 1$ verwenden.

Zur Abkürzung verwenden wir gelegentlich die Bezeichnungen $(e + x^2)^m = (1+x_1^2)^{m_1} \cdots (1+x_N^2)^{m_N}$, $(x-\zeta)^{-1} = (x_1-\zeta_1)^{-1} \cdots (x_N-\zeta_N)^{-1}$,

$$\binom{m}{n} = \binom{m_1}{n_1} \cdots \binom{m_N}{n_N} \quad \text{und} \quad m! = m_1!\, m_2! \ldots m_N!.$$

Für Distributionen benutzen wir vielfach die Schreibweise $u(x) = u(x_1, \ldots, x_N)$, wenn es sich um ein Funktional auf einem Raum von Funktionen $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_N)$ handelt. Diese Schreibweise ist besonders nützlich bei Rela-

[1]) Auf diese Multiplikation soll an anderer Stelle näher eingegangen werden.

tionen wie $u(x) = \lim_{y \to 0} g(x+iy)$, wobei $g$ eine Funktion der komplexen Variablen $z = x+iy$ ist. Den Wert von $u$ an der Stelle $\varphi$ schreiben wir $u[\varphi] = \langle u, \varphi \rangle$ oder auch symbolisch $\int u(x)\, \varphi(x)\, dx$.
Im Übrigen schließen wir uns weitgehend an die Bezeichnungen in [5], II an.

## § 1. Darstellung von gemäßigten Distributionen durch Randverteilungen analytischer Funktionen

Die gemäßigten Distributionen[2]) wurden von L. SCHWARTZ [4] eingeführt als die stetigen Linearfunktionen auf dem Raum $\mathcal{S}$ der beliebig oft differenzierbaren, schnell abnehmenden Funktionen. Dabei kann die Topologie in $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^N)$ definiert werden durch die Folge der Normen[3])

$$(1) \qquad \|\varphi\|_{k,n} = \sup_x \left| (e+x^2)^k \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} \varphi(x) \right|, \quad k = (k_1, \ldots, k_N), \quad n = (n_1, \ldots, n_N),$$

wobei die Bezeichnungen

$$(e+x^2)^k = (1+x_1^2)^{k_1} \cdots (1+x_N^2)^{k_N}, \quad \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_N}}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_N^{n_N}}$$

benutzt sind. Die Elemente des dualen Raumes sind dann diejenigen Distributionen $u$, die sich in der Form

$$(2) \qquad u(x) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} (e+x^2)^m g(x) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} f(x)$$

schreiben lassen, wobei $g(x)$ eine beschränkte, stetige Funktion ist. Indem man $m$ vergrößert, kann man dann auch $g(x)$ stetig und aus $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^N)$ annehmen.

Da nun die Funktionen $g \in \boldsymbol{L}^2$ umkehrbar eindeutig durch ihre Indikatrixfunktionen $\tilde{g}(\zeta)$, die in $(\Omega - \bar{\boldsymbol{R}})^N = (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N$ holomorph sind, charakterisiert werden, liegt eine natürliche Zuordnung zwischen den gemäßigten Distributionen (2) und holomorphen Funktionen $\hat{u}(z)$ nahe, derart, daß $u$ durch $\hat{u}$ vollständig bestimmt ist.

Für die stetige Funktion $g \in \boldsymbol{L}^2$ und ihre Indikatrix

$$(3) \qquad \begin{cases} \tilde{g}(\zeta) = (2\pi i)^{-N} \int g(x)\, (x-\zeta)^{-1}\, dx \\ \qquad = (2\pi i)^{-N} \int\limits_{\boldsymbol{R}^N} g(x_1, \ldots, x_N)\, (x_1 - \zeta_1)^{-1} \cdots (x_N - \zeta_N)^{-1}\, dx_1, \ldots, dx_N \end{cases}$$

gilt nach II[4]), Satz 14 und 18:

$$g_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \prod_1^N \sigma_j \tilde{g}(x + i\varepsilon\sigma)$$

konvergiert in der $\boldsymbol{L}^2$-Topologie und gleichmäßig auf jeder kompakten Menge aus $\boldsymbol{R}^N$ gegen $g(x)$. Insbesondere gilt also $g_\varepsilon \to g$ im Sinne der starken Topologie

[2]) „distributions temperées".

[3]) oder auch durch die Normen $|||\varphi|||_{k,n} = \left\| (e+x^2)^k \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} \varphi(x) \right\|_{L^2}$.

[4]) Mit I bzw. II werden im folgenden die Arbeiten [5], I bzw. [5], II zitiert.

von $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{D}'$. Der Distribution $u(x) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}(e+x^2)^m g(x)$, $g(x)$ stetig und $g \in \boldsymbol{L}^2$, ordnen wir nun die holomorphe Funktion

$$(4)\qquad \begin{cases} \hat{u}(z) = \dfrac{\partial^{|n|}}{\partial z^n}(e+z^2)^m \tilde{g}(z) \in \boldsymbol{H}\big((\Omega - \bar{\boldsymbol{R}})^N\big) = \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big) \\ \qquad = \dfrac{\partial^{|n|}}{\partial z^n}(1+z_1^2)^{m_1} \dots (1+z_N^2)^{m_N} \tilde{g}(z) \end{cases}$$

zu. Nach II, Satz 13 genügen die Ableitungen von $\tilde{g}(z)$ einer Abschätzung

$$\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial z^k}\tilde{g}(z)\right| = |\tilde{g}^{(k)}(z)| \leqq M_k \cdot \prod_{j=1}^{N} |y_j|^{-\frac{1}{2}-k_j} = M_k |y|^{-\frac{e}{2}-k}, \quad y_j = \operatorname{Im}(z_j),$$

und daher gilt

$$|\hat{u}(z)| \leqq M \cdot \sup_{\nu \leqq n} \left(e + |z|^2\right)^{m-\frac{\nu}{2}} \cdot |y|^{-\frac{e}{2}-(n-\nu)}$$

also

$$(5)\qquad |\hat{u}(z)| \leqq M\left(e+|z|^2\right)^m \cdot |y|^{-\frac{e}{2}-n} = M \cdot \prod_{j=1}^{N} \left(1+|z_j|^2\right)^{m_j} \cdot |y_j|^{-\frac{1}{2}-n_j}.$$

Die Näherungen

$$(6)\qquad \hat{u}_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \prod_1^N \sigma_j \hat{u}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma)$$

sind holomorphe, langsam wachsende Funktionen auf $\boldsymbol{R}^N$ und es gilt:

$$(7)\qquad \hat{u}_\varepsilon(x) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}(e+x^2)^m \tilde{g}_\varepsilon(x) + \varepsilon \cdot \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n} \sum_\sigma \varrho_\sigma(x,\varepsilon)\, \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma),$$

wobei $\varrho_\sigma(x,\varepsilon)$ ein Polynom in $x$ und $\varepsilon$ ist, dessen Grad $< 2|m|$ ist. Da $\tilde{g}_\varepsilon \to g$ in der starken Topologie von $\mathcal{S}'$, Multiplikation mit Polynom und Differentation stetige Operationen in $\mathcal{S}'$ sind und das letzte Glied in (6) mit $\varepsilon \searrow 0$ in $\mathcal{S}'$ stark gegen Null geht, folgt $\hat{u}_\varepsilon(x) \to \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}(e+x^2)^m g(x) = u(x)$, wir haben also:

**1.1. Satz.** *Ordnet man der Distribution* $u(x) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}(e+x^2)^m g(x) \in \mathcal{S}'$, $g \in \boldsymbol{L}^2$, *die holomorphe Funktion* $\hat{u}(z) = \frac{\partial^{|n|}}{\partial z^n}(e+z^2)^m \tilde{g}(z) \in \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ *zu, so genügt* $\hat{u}(z)$ *einer Abschätzung* (5) *und die Näherungen* (6) *konvergieren in* $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N)$ *stark gegen* $u$. *Jede Distribution* $u \in \mathcal{S}$ *kann also als Randverteilung einer holomorphen Funktion* $\hat{u} \in \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ *aufgefaßt werden.*

Es gilt weiterhin

**1.2. Satz.** *Sei* $\hat{u}(z)$ *eine Funktion aus* $\boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$, *die einer Abschätzung* (5) *genügt. Dann konvergieren die holomorphen Funktionen* $\hat{u}_{\varepsilon,\sigma}(x) = \hat{u}_\sigma(x + i\,\varepsilon\sigma)$ *auf* $\boldsymbol{R}^N$ *gegen eine gemäßigte Distribution* $u_\sigma$ *im Sinne der starken Topologie von* $\mathcal{S}'$.

**Beweis.** $\hat{u}_\sigma(z)$ ist die Komponente von $\hat{u}(z)$ im Gebiet $G_\sigma = \{z;\, \sigma_j \operatorname{Im}(z_j) > 0\}$. Aus der Abschätzung $|\hat{u}(z)| \leqq M\left(e+|z|^2\right)^m |y|^{-\frac{e}{2}-n}$ erhalten wir für die unbestimmten Integrale

$$(8)\qquad \hat{u}_\sigma^{(-e_j)}(z) = \int_{\sigma_j \cdot i}^{z_j} \hat{u}_\sigma(z)\, dz_j$$

die Abschätzung

$$|\hat{u}_\sigma^{(-e_j)}(z)| \leqq M_{e_j}\left(e+|z|^2\right)^{m+\frac{e_j}{2}} \cdot |y|^{-\frac{e}{2}-(n-e_j)} \quad \text{für} \quad |y_j| = |\operatorname{Im}(z_j)| \leqq 1 .$$

Durch Induktion folgt dann bei wiederholter Integration

$$|\hat{u}_\sigma^{(-n)}(z) \leqq M_n\left(e+|z|^2\right)^{m+\frac{n}{2}} \cdot |y|^{-\frac{e}{2}}$$

und eine weitere Integration nach jeder Variablen zeigt, daß

$$|\hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(z)| \leqq M_{n+e}\left(e+|z|^2\right)^{m+\frac{n+e}{2}} \tag{9}$$

in $|\operatorname{Im}(z_j)| \leqq 1$ und daß $\hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(z)$ auf $G_\sigma \subset \boldsymbol{R}^N$ stetig fortsetzbar ist. Die Funktion $f_\sigma(x)$, die durch die Randwerte gegeben ist, genügt der Bedingung

$$|f_\sigma(x)| \leqq |\hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x+i\,0\sigma)| \leqq M_{n+e}\cdot\left(e+|x|^2\right)^{m+\frac{n+e}{2}} \tag{10}$$

und die Güte der Konvergenz gegen die Randwerte läßt sich abschätzen durch

$$|\hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x+i\,\varepsilon\sigma) - \hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x+i\,\delta\sigma)| \leqq M_{n+e}^*\left(e+|x|^2\right)^{m+\frac{n+e}{2}} \cdot |\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\delta}\,| . \tag{11}$$

Die holomorphen Funktionen $\hat{u}_{\varepsilon,\sigma}(x) = \hat{u}(x+i\,\varepsilon\sigma)$ definieren auf $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^N)$ stetige lineare Funktionale

$$\hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi] = \int \hat{u}_\sigma(x+i\,\varepsilon\sigma)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{n+e}\int \hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x+i\,\varepsilon\sigma)\,\varphi^{(n+e)}(x)\,dx , \tag{12}$$

die für $\varepsilon \searrow 0$ gegen

$$\hat{u}_\sigma[\varphi] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi] = (-1)^{n+e}\int \hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x+i\,0\sigma)\,\varphi^{(n+e)}(x)\,dx = f_\sigma^{(n+e)}[\varphi] \tag{13}$$

konvergieren. Dabei erfolgt die Konvergenz im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{S}'$. Denn wegen (11) gilt:

$$\hat{u}_\sigma[\varphi] - \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi] = (-1)^{n+e}\int_{R^N}\{\hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x+i\,0\sigma) - \hat{u}_\sigma^{(-n-e)}(x+i\,\varepsilon\sigma)\}\varphi^{(n+e)}(x)\,dx$$

$$|\hat{u}_\sigma[\varphi] - \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi]| \leqq \sqrt{\varepsilon}\,M_{n+e}^*\int \left(e+x^2\right)^{m+\frac{n+e}{2}} |\varphi^{(n+e)}(x)|\,dx .$$

Auf der Umgebung

$$W_{k,n+e,\eta} = \{\varphi\,;\,|(e+x^2)^k\,\varphi^{(n+e)}(x)| < \eta\}$$

mit $k \geqq m+\frac{n+e}{2}$ gilt also

$$|\hat{u}_\sigma[\varphi] - \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi]| \leqq \sqrt{\varepsilon}\,\eta\,M_{n+e}^*\cdot\pi^N$$

und dies geht mit $\varepsilon \searrow 0$ gleichmäßig gegen 0. Insbesondere geht also $\hat{u}_\sigma[\varphi] - \hat{u}_{\varepsilon,\sigma}[\varphi]$ gleichmäßig gegen 0 auf jeder beschränkten Menge von $\mathscr{S}$. Mit den $\hat{u}_\sigma$ ist dann auch

$$u = \sum_\sigma \left(\prod_1^N \sigma_j\right)\hat{u}_\sigma$$

eine gemäßigte Distribution und

$$u = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma} \left( \prod_{1}^{N} \sigma_j \right) \hat{u}_{\varepsilon,\sigma} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_{\varepsilon} \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'.$$

Nach Satz 1.1. und 1.2. ist also jede Distribution $u \in \mathcal{S}'$ in eine Summe $u = \sum_{\sigma} \left( \prod \sigma_j \right) \hat{u}_{\sigma}$, $\hat{u}_{\sigma}(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_{\sigma}(x + i\varepsilon\sigma)$ zerlegbar. Bezeichnen wir mit $\boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ den Teilraum von $\boldsymbol{H}\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$, der aus den „langsam wachsenden" Funktionen $\hat{u}$ besteht, die einer Abschätzung (5) mit geeigneten $M, m, n$ genügen, so ist die Abbildung

$$(14) \qquad P: \quad \hat{u} \to u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \hat{u}_{\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma} \left( \prod \sigma_j \right) \hat{u}_{\sigma}(x + i\varepsilon\sigma)$$

nach Satz 1.1. und 1.2. eine Abbildung von $\boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ *auf* den Raum $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N)$ der gemäßigten Distributionen.

Diese Abbildung ist aber nicht mehr eineindeutig. Man kann ja z. B. zu $\hat{u}(z)$ ein Polynom in $z_1, \ldots, z_N$ addieren, ohne daß dies auf den $\lim \sum_{\sigma} \left( \prod \sigma_j \right) \hat{u}_{\sigma}(x + i\varepsilon\sigma)$ von Einfluß ist. Um den Kern der Abbildung $P$ zu bestimmen, betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall $N = 1$. Dann ist $u = 0$ genau dann, wenn $\hat{u}^{(-n-1)}(x + i0) - \hat{u}^{(-n-1)}(x - i0)$ ein Polynom höchstens $n$-ten Grades ist. Durch Wahl der Integrationskonstanten in den unbestimmten Integralen $\hat{u}_{\sigma}^{(-\nu)}(z)$ kann man also erreichen, daß $\hat{u}^{(-n-1)}(x + i0) - \hat{u}^{(-n-1)}(x - i0) \equiv 0$ wird. Dann ist also $\hat{u}^{(-n-1)} = \{\hat{u}_{+}^{(-n-1)}, \hat{u}_{-}^{(-n-1)}\}$ ein Paar holomorpher Funktionen welche auf $\boldsymbol{R}$ die gleichen stetigen Randwerte haben. Also sind $\hat{u}_{+}^{(-n-1)}$ und $\hat{u}_{-}^{(-n-1)}$ Komponenten einer ganzen analytischen Funktion $\hat{u}^{(-n-1)}(z)$, welche einer Abschätzung $|\hat{u}^{(-n-1)}(z)| \leqq M_{n+1}\left(1 + |z|^2\right)^{m + \frac{n+1}{2}}$ für alle $z \in \boldsymbol{C}$ genügt. Dann muß aber $\hat{u}^{(-n-1)}(z)$ ein Polynom von einem Grad $\leqq 2m + n + 1$ sein. Also ist $\hat{u}(z)$ ein Polynom von einem Grad $\leqq 2m$.

Wir beweisen nun durch Induktion:

**1.3. Satz.** *Der Kern des Homomorphismus* $P$: $\hat{u}(z) \to u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_{\varepsilon}(x)$ *von* $\boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ *auf* $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N)$ *besteht aus allen endlichen Linearkombinationen von Funktionen* $z_j^{\nu} a_{j\nu}(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_N)$ *wobei* $a_{j\nu}(z_{[j]}) \in \boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-1}\right)$ *ist (Pseudopolynome).*

*Der Raum* $\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N)$ *ist also natürlich isomorph dem Quotientenraum von* $\boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ *nach dem Teilraum* $\boldsymbol{H}_P\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$ *aller Pseudopolynomen*:

$$\mathcal{S}'(\boldsymbol{R}^N) \cong \boldsymbol{H}_L\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right) / \boldsymbol{H}_P\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right).$$

**Beweis.** $u[\varphi] = (-1)^{|n+e|} \int \left\{ \sum_{\sigma} \prod_{1}^{N} \sigma_j \, \hat{u}_{\sigma}^{(-n-e)}(x + i0\sigma) \right\} \varphi^{(n+e)}(x)\, dx.$

Ist $u[\varphi] = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D} < \mathcal{S}$, so muß die stetige Funktion $f(x) = \sum_{\sigma} \prod \sigma_j \, \hat{u}_{\sigma}^{(-n-e)}(x + i0\sigma)$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^{|n+e|}}{\partial x^{n+e}} f(x) = 0$ genügen, wobei die Ableitungen im Sinne der Distributionstheorie zu bilden sind. Dann

ist aber $f(x)$ eine Summe $\sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n_j} x_j^{\nu} a_{j\nu}(x_{[j]})$, wobei die Koeffizienten $a_{j\nu}(x_{[j]})$ langsam wachsende, stetige Funktionen der $N-1$ Variablen $x_k$, $k \neq j$, sind[5]).

Nach dem Beweis von Satz 1.1. für $n=0$ und $N-1$ statt $N$ gilt dann aber

$$a_{j\nu}(x_{[j]}) = \sum_{\sigma_{[j]}} \prod_{k\neq j} \sigma_k \hat{a}_{j\nu}(x_{[j]} + i\,0\,\sigma_{[j]}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma_{[j]}} \prod_{k\neq j} \sigma_k \hat{a}_{j\nu}(x_{[j]} + i\,\varepsilon\,\sigma_{[j]}).$$

Das bedeutet aber, daß die Integrationskonstanten bei der Bildung des $n+e$-fachen unbestimmten Integrals $\hat{u}_{\sigma}^{(-n-e)}(z)$ so gewählt werden können, daß

$$f(x) = \sum_{\sigma} \prod_{1}^{N} \sigma_j \hat{u}_{\sigma}^{(-n-e)}(x + i\,0\,\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma} \prod \sigma_j \hat{u}_{\sigma}^{(-n-e)}(x + i\,\varepsilon\,\sigma) = 0$$

ist.

Es bleibt also zu zeigen:

**1.4. Satz.** *Ist $\hat{v}(z)$ eine gemäß (5) langsam wachsende holomorphe Funktion in $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N$ mit stetigen Randwerten auf $\boldsymbol{R}^N$, derart, daß*

$$v_0(x) = \sum_{\sigma} \prod_{1}^{N} \sigma_j \hat{v}_{\sigma}(x + i\,0\,\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma} \prod_{1}^{N} \sigma_j \hat{v}_{\sigma}(x + i\,\varepsilon\,\sigma) \equiv 0$$

*gilt, so ist $\hat{v}(z)$ ein Pseudopolynom:*

$$\hat{v}(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\nu=0}^{n_j} z_j^{\nu}\, b_{j\nu}(z_{[j]}),$$

*$b_{j\nu}$ unabhängig von $z_j$ und $\sigma_j$ und umgekehrt gilt für jedes solche $\hat{v}(z)$ auch $v_0(x) \equiv 0$.*

**Beweis von Satz 1.4.** Für $N=1$ ist die Behauptung schon bewiesen, da dann die Pseudopolynome $\hat{v}(z)$ genau die gewöhnlichen Polynome in $z$ sind.

Für $N>1$ sei $\bar{\sigma} = \sigma_{[N]} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{N-1})$, $\sigma = (\sigma_{[N]}, \sigma_N) = (\bar{\sigma}, \sigma_N)$, $\bar{x} = x_{[N]}$. Die Funktion $v_0(x)$ zerlegen wir in $v_0 = v_+ - v_-$,

$$(15) \qquad \begin{cases} v_+(x) = \sum_{\sigma} \prod_{j=1}^{N-1} \sigma_j \hat{v}_{(\bar{\sigma},+1)}(\bar{x} + i\,0\,\bar{\sigma},\, x_N + i\,0) \\ v_-(x) = \sum_{\bar{\sigma}} \prod_{1}^{N-1} \sigma_j \hat{v}_{(\bar{\sigma},-1)}(\bar{x} + i\,0\,\bar{\sigma},\, x_N - i\,0). \end{cases}$$

$v_+(\bar{x}, x_N + i\,0)$, $v_-(\bar{x}, x_N - i\,0)$ stimmen also überein. Also sind $v_+(\bar{x}, z)$, $v_-(\bar{x}, z)$ Teile einer ganzen holomorphen Funktion in $z_N$, $v(\bar{x}, z_N)$. Da die $\hat{v}_{\sigma}(z)$ langsam wachsen, muß $v(\bar{x}, z_N)$ ein Polynom in $z_N$ sein, dessen Koeffizienten stetige Funktionen von $(x_1, \ldots, x_{N-1}) = x_{[N]}$ sind, welche auch langsam wachsen:

$$v(x_{[N]}, z_N) = \sum_{k=0}^{k_N} z_N^k \cdot b_{N,k}(x_{[N]}).$$

Nach Satz 1.1. kann aber jedes $b_{N,k}$ durch die Randwerte holomorpher Funktionen $\hat{b}_{N,k,\sigma_{[N]}}(z_1, \ldots, z_{N-1})$ dargestellt werden, wobei die

$$\hat{b}_{N,k,\varepsilon}(\bar{x}) = \sum_{\bar{\sigma}} \prod_{1}^{N-1} \sigma_j \hat{b}_{N,k,\bar{\sigma}}(\bar{x} + i\,\varepsilon\,\bar{\sigma})$$

[5]) Siehe Anhang.

auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen $b_{N,k}(x_{[N]}) = b_{N,k}(\bar{x})$ konvergieren.

$$\hat{v}_N(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{k=0}^{k_N} z_N^k \, \hat{b}_{N,k,\sigma[N]}(z_1, \ldots, z_{N-1}) \quad \text{für } z \in G_\sigma \tag{16}$$

ist dann ein Pseudopolynom aus $\boldsymbol{H}_L\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$.

$$\hat{w}_N(z_1, \ldots, z_N) = \hat{v}(z_1, \ldots, z_N) - \hat{v}_N(z_1, \ldots, z_N)$$

ist ebenfalls aus $\boldsymbol{H}_L\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ und

$$w_{N,0}(\bar{x}, z_N) = \sum_{\bar{\sigma}} \prod_{1}^{N-1} \sigma_j \, \hat{w}_{N,\sigma}(\bar{x} + i\,0\,\bar{\sigma}, z_N) \equiv 0$$

für alle komplexen $z_N (\notin \boldsymbol{R})$.

Fortsetzung der obigen Schlußweise liefert nun nacheinander die Abspaltung von Pseudopolynomen $\hat{v}_{N-1}, \ldots, \hat{v}_2$, bis schließlich eine Funktion $\hat{w}_1(z_1, \ldots, z_N) \in \boldsymbol{H}_L\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ übrig bleibt, für die $\hat{w}_1(x_1 + i\,0, z_2, \ldots, z_N) - \hat{w}_1(x_1 - i\,0, z_2, \ldots, z_N) \equiv 0$ ist, so daß $\hat{w}_1(z_1, \ldots, z_N) = \hat{v}_1(z_1, \ldots, z_N)$ ein Pseudopolynom der Gestalt $\hat{v}_1(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{0}^{k_1} z_1^k \cdot \hat{v}_{1,k,\sigma[1]}(z_2, \ldots, z_N)$, $z \in G_\sigma$ ist. Es ist also auch $\hat{v}(z_1, \ldots, z_N) = \hat{v}_1(z_1, \ldots, z_N) + \cdots + \hat{v}_N(z_1, \ldots, z_N)$ ein Pseudopolynom.

Daß umgekehrt für jedes Pseudopolynom $\hat{v}(z) = \hat{v}_1(z) + \cdots + \hat{v}_N(z)$ die Funktion $v_0(x) = \sum_{\sigma} \prod \sigma_j \hat{v}_\sigma(x + i\,0\sigma) \equiv 0$ ist, ist aber trivial, da jeder Summand $\hat{v}_j(z)$ des Pseudopolynoms in bezug auf die Variable $z_j$ eine ganze Funktion ist und die Sprungfunktion

$$\sum_k \{(x_j + i\,0)^k - (x_j - i\,0)^k\} \, \hat{b}_{j,k,\sigma[j]}(z_{[j]})$$

identisch verschwindet.

Also ist Satz 1.4. und damit Satz 1.3. vollständig bewiesen.

## § 2. Darstellung von Distributionen endlicher Ordnung durch holomorphe Funktionen

Es sei $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$ der Raum der Distributionen endlicher Ordnung, d.h. der Ableitungen endlicher Ordnung von stetigen Funktionen. Wir zeigen zunächst, daß jede solche Distribution $u \in \mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$ sich schreiben läßt in der Form

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N) \, g(x_1, \ldots, x_N), \tag{17}$$

wobei $f(x_1, \ldots, x_N)$ die Einschränkung einer ganzen, analytischen Funktion $f(z_1, \ldots, z_N)$ auf den $\boldsymbol{R}^N$ und $g(x_1, \ldots, x_N)$ eine stetige, quadratintegrable Funktion ist. Dann liegt wieder die Approximation von $u(x)$ durch die holomorphen Funktionen

$$\hat{u}_\varepsilon(x) = \sum_{\sigma} \left( \prod_{1}^{N} \sigma_j \right) \hat{u}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma)$$

nahe, wobei

$$\hat{u}(z_1, \ldots, z_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} f(z_1, \ldots, z_N)\, \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N) \in \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N\big)$$

ist.

**2.1. Lemma**[6]. *Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_N)$ eine beliebige stetige Funktion im Raume $\boldsymbol{R}^N$ von $N$ reellen Variablen. Dann existiert eine ganze analytische Funktion $f(z_1, \ldots, z_N)$ im Raume $\boldsymbol{C}^N$ von $N$ komplexen Variablen, welche keine Nullstellen besitzt und für reelle $z_i = x_i$ der Ungleichung*

$$f(x_1, \ldots, x_N) \geqq |\varphi(x_1, \ldots, x_N)| \tag{18}$$

*genügt.*

**Beweis.** Sei $r(x) = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}$, $k(s) = \max\limits_{0 \leqq r(x) \leqq s} 1 + |\varphi(x_1, \ldots, x_N)|$. Dann ist $k(s) \geqq 1$, monoton wachsend und stetig. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ seien zwei monotone, divergente Folgen positiver reeller Zahlen mit $a_n > b_n$ (z.B. $a_n = 2n$, $b_n = n$). Es gibt dann eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $m_n$, so daß

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{2m_n} \geqq k(a_{n+1}) \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots.$$

Dann ist

$$h_1(z) = k(a_1) + \sum_1^\infty \left(\frac{z}{b_n}\right)^{2m_n} \tag{19}$$

wegen $b_n \to \infty$ eine gerade, ganze analytische Funktion von $z$ und es gilt

$$h_1(a_n) \geqq \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{2m_n} \geqq k(a_{n+1}), \quad \text{also } h_1(x) \geqq k(x) \geqq 1$$

für alle reellen $x$. Dann ist auch

$$h(z_1, \ldots, z_N) = k(a_1) + \sum_1^\infty \left(\frac{z_1^2 + \cdots + z_N^2}{b_n^2}\right)^{m_n} \tag{20}$$

eine ganze analytische Funktion im $\boldsymbol{C}^N$ und es gilt für reelle Argumente $z_i = x_i$:

$$h(x_1, \ldots, x_N) = h_1\big(r(x)\big) \geqq k\big(r(x)\big) \geqq 1 + |\varphi(x_1, \ldots, x_N)|.$$

Mit $h$ ist auch $f(z_1, \ldots, z_N) = \exp\big(h(z_1, \ldots, z_N)\big)$ eine ganze, dazu nullstellenfreie, analytische Funktion und aus $e^s \geqq s$ für $s \geqq 0$ folgt

$$f(x_1, \ldots, x_N) \geqq h(x_1, \ldots, x_N) \geqq 1 + |\varphi(x_1, \ldots, x_N)|.$$

Es sei nun $u(x_1, \ldots, x_N)$ eine Distribution endlicher Ordnung, also

$$u(x_1, \ldots, x) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \psi(x_1, \ldots, x_N)$$

mit stetigem $\psi$. Nach 2.1. können wir dann $\varphi(x) = \psi(x) \cdot \prod\limits_{j=1}^N (1 + x_j^2)$ durch eine nullstellenfreie, ganze analytische Funktion $f(z_1, \ldots, z_N)$ majorisieren. $g(x) = \frac{\psi(x)}{f(x)}$ wird dann durch $\prod\limits_1^N (1 + x_j^2)^{-1}$ majorisiert, ist also eine stetige

[6]) Vgl. Sato [3], S. 161.

Funktion aus $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^N)$, welche differenzierbar ist, falls $\psi$ es ist und es ist

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N)\, g(x_1, \ldots, x_N).$$

Nach II, Satz 14 und 18 ist dann die Indikatrix

$$(21) \quad \begin{cases} \tilde{g}(z) = \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N) \\ \quad = (2\pi i)^{-N} \int\limits_{\boldsymbol{R}^N} g(x_1, \ldots, x_N)\,(x_1 - z_1)^{-1} \ldots (x_N - z_N)^{-1}\, dx_1 \ldots dx_N \end{cases}$$

in $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N$ holomorph und die holomorphen Funktionen

$$(22) \qquad g_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \left( \prod_{j=1}^N \sigma_j \right) \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma)$$

konvergieren auf $\boldsymbol{R}^N$ in der $\boldsymbol{L}^2$-Norm und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall gegen $g(x_1, \ldots, x_N)$. Der Distribution

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N)\, g(x_1, \ldots, x_N)$$

ordnen wir nun die Funktion

$$\hat{u}(z_1, \ldots, z_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} f(z_1, \ldots, z_N)\, \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N)$$

zu. Dann gilt

**2.2. Satz.** *Jede Distribution endlicher Ordnung $u(x_1, \ldots, x_N)$ hat die Form*

$$u(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N)\, g(x_1, \ldots, x_N)$$

*mit*

$$f \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}^N) \quad \textit{und} \quad g \in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^N) \cap \mathscr{C}(\boldsymbol{R}^N).$$

*Die holomorphen Funktionen*

$$\hat{u}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_N) = \sum_\sigma \prod_{j=1}^N \sigma_j\, \hat{u}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma)$$

*mit*

$$\hat{u}(z_1, \ldots, z_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} f(z_1, \ldots, z_N)\, \tilde{g}(z_1, \ldots, z_N)$$

*konvergieren mit $\varepsilon \to 0$ in $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^N)$ stark gegen $u$.*

**Beweis.** Wir haben nur noch die Konvergenz $\hat{u}_\varepsilon \to u$ zu zeigen. Ist $B$ eine beschränkte Menge von Funktionen aus $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^N)$, so haben alle $\varphi \in B$ ihren Träger in einer kompakten Menge $K = K_B$ und die $\frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \varphi(x)$, $\varphi \in B$ sind auf $K$ gleichmäßig beschränkt. Nun ist

$$\hat{u}_\varepsilon(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} f(x_1, \ldots, x_N) \sum_\sigma \prod \sigma_j\, \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma) + \\ + \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \sum_\sigma \prod \sigma_j \{ f(x + i\,\varepsilon\,\sigma) - f(x) \}\, \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma).$$

Da $g_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \prod \sigma_j \tilde{g}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$ nach II, Satz 18 auf jeder kompakten Menge gleichmäßig gegen $g(x)$ strebt mit $\varepsilon \to 0$, geht das erste Glied in $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^N)$ stark gegen $u(x)$. Für das zweite Glied gilt aber

$$\left\langle \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \sum_\sigma \prod \sigma_j \{f(x + i\varepsilon\sigma) - f(x)\} \tilde{g}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma),\ \varphi(x) \right\rangle$$
$$= (-1)^m \sum_\sigma \prod \sigma_j \int_K \{f(x + i\varepsilon\sigma - f(x)\} \tilde{g}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)\ \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m} \varphi(x)\, dx.$$

Da die $\tilde{g}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$ für $\varepsilon \to 0$ in der $\boldsymbol{L}^2$-Norm beschränkt bleiben, geht dieser Ausdruck wie $0(\varepsilon)$ gegen 0, gleichmäßig für alle $\varphi \in B$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Funktion

$$\hat{u}(z) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial z^m} f(z)\, \bar{\tilde{g}}(z) = \sum_{0 \leqq n \leqq m} \binom{m}{n} \frac{\partial^{|m-n|} f(z)}{\partial z^{m-n}} \cdot \frac{\partial^{|n|} \bar{\tilde{g}}(z)}{\partial z^n}$$
$$\left( \binom{m}{n} = \binom{m_1}{n_1} \cdots \binom{m_N}{n_N}, \quad n \leqq m \Leftrightarrow n_j \leqq m_j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, N \right)$$

genügt wegen II, Satz 3 einer Abschätzung

$$(23) \qquad \begin{cases} |\hat{u}(z)| \leqq k_0(|z|) \prod_{j=1}^N \left(1 + |y_j|^{-m_j - \frac{1}{2}}\right) \\ \qquad \leqq k(|z|) \cdot \prod_1^N |y_j^*|^{-m_j - \frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad |y_j| = |\operatorname{Im}(z_j)| \leqq 1, \end{cases}$$

wobei $k_0(r)$, $k(r)$ als stetige, monoton wachsende Funktionen gewählt werden können.

Die Gesamtheit aller holomorphen Funktionen aus $\boldsymbol{H}((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N)$, die einer solchen Abschätzung (23) genügen, bezeichnen wir mit $\boldsymbol{H}_F((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N)$. Man sieht dann leicht, daß $\boldsymbol{H}_F((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N)$ genau aus denjenigen Funktionen aus $\boldsymbol{H}((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N)$ besteht, von denen ein endlichfaches unbestimmtes Integral stetige Randwerte auf $\boldsymbol{R}^N$ besitzt. Daraus folgt unmittelbar

**2.3. Satz.** *Für jedes $\hat{u}(z) \in \boldsymbol{H}_F((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N)$ konvergieren die holomorphen Funktionen $\hat{u}_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \prod \sigma_j \hat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$ auf $\boldsymbol{R}^N$ im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^N)$ gegen eine Distribution $u(x)$ von endlicher Ordnung.*

*Die Abbildung $P$: $\hat{u}(z) \to u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_\sigma \prod_{j=1}^N \sigma_j \hat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$ ist also ein Homomorphismus von $\boldsymbol{H}_F((\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})^N)$ auf den Raum $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$.*

Zur Bestimmung des Kerns dieser Abbildung $P$ betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall.

Es gilt dann für $\hat{u}(z) \in \boldsymbol{H}_F(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})$ und $u = P\hat{u}$, $\varphi \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R})$

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle \hat{u}_+(x + i\varepsilon) - \hat{u}_-(x - i\varepsilon),\ \varphi(x) \rangle =$$
$$= (-1)^{|m|} \int \{\hat{u}_+^{(-m)}(x + i0) - \hat{u}_-^{(-m)}(x - i0)\}\, \varphi^{(m)}(x)\, dx.$$

Wenn nun $\langle u, \varphi\rangle \equiv 0$ gilt, so muß $\hat{u}_+^{(-m)}(x+i0) - \hat{u}_-^{(-m)}(x-i0)$ ein Polynom vom Grad $\leqq m-1$ sein. Da wir aber für $\hat{u}_\pm^{(-m)}$ ein beliebiges unbestimmtes Integral wählen, also die Integrationskonstanten geeignet vorgeben können, dürfen wir annehmen, daß $\hat{u}_+^{(-m)}(x+i0) - \hat{u}_-^{(-m)}(x-i0) \equiv 0$ ist. Dann ist aber $\hat{u}^{(-m)}(z)$ und damit auch $\hat{u}(z)$ eine ganze analytische Funktion von $z$.

Umgekehrt ist aber natürlich für jede ganze Funktion $\hat{u}(z)$ der Limes $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \{\hat{u}(x+i\varepsilon) - \hat{u}(x-i\varepsilon)\} = 0$ gleichmäßig auf allen kompakten Mengen, also erst recht $u_\varepsilon \to 0$ in der starken Topologie von $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$. Wir haben damit:

**2.4. Satz.** *Der Kern des Homomorphismus $P$ von $\boldsymbol{H}_F(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ auf $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R})$ besteht genau aus dem Raum $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$ der ganzen analytischen Funktionen. Der Raum $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R})$ ist also natürlich isomorph dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_F(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$.*

Im Falle beliebiger Dimension $N$ hat ein $m$-faches unbestimmtes Integral $\hat{u}_\sigma^{(-m)}(z)$ der Komponenten $\hat{u}_\sigma(z)$ von $u \in \boldsymbol{H}_F\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$, $m = (m_1, \ldots, m_N)$, stetige Randwerte auf $R^N$. Indem wir notfalls die $m_i$ vergrößern, können wir annehmen, daß die Randfunktionen

$$\psi_\sigma(x) = \hat{u}_\sigma^{(-m)}(x + i0\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{u}_\sigma^{(-m)}(x + i\varepsilon\sigma)$$

noch stetige Ableitungen vom Rang 1 haben. Die durch $\hat{u}(z)$ bestimmte Distribution hat dann die Gestalt

$$\langle u, \varphi\rangle = (-1)^{|m|} \int \psi(x)\, \varphi^{(m)}(x)\, dx,$$

$$\psi(x) = \sum_\sigma \prod_1^N \sigma_j \psi_\sigma(x) = \sum_\sigma \prod \sigma_j \hat{u}_\sigma^{(-m)}(x + i0\sigma)$$

ist nun $P\hat{u} = 0$, also $\langle u, \varphi\rangle \equiv 0$, so muß $\psi$ die Gestalt $\psi(x) = \sum_{j=1}^N \prod_{k=0}^{m_j-1} x_j^k a_{jk}(x_{[j]})$ haben, wobei $a_{jk}(x_{[j]})$ stetige Funktionen sind (vgl. Anhang), ebenso wie ihre Ableitungen vom Rang 1. Dann gibt es aber nach dem Satz 2.2. holomorphe Funktionen $\hat{a}_{jk}(z_{[j]}) \in \boldsymbol{H}_F\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-1}\right)$, derart, daß alle Komponenten $\hat{a}_{jk,\sigma_{[j]}}$ von $\hat{a}_{jk}$ stetige Randwerte auf $\boldsymbol{R}^{N-1}$ haben und

$$a_{jk}(x_{[j]}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma_{[j]}} \prod_{i \neq j} \sigma_i \hat{a}_{j,k,\sigma_{[j]}}(x_{[j]} + i\varepsilon\sigma_{[j]}) \tag{24}$$

(gleichmäßige Konvergenz). Dann ist also mit

$$q_j(z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m_j-1} z_j^k \hat{a}_{jk}(z_{[j]}) & \text{für } \operatorname{Im}(z_j) > 0 \\ 0 & \text{für } \operatorname{Im}(z_j) < 0 \end{cases}$$

$$v(z) = u^{(-m)}(z) - \sum_{j=1}^N q_j(z) \in \boldsymbol{H}_F\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\right)$$

ein anderes $m$-faches Integral von $\hat{u}$ und

$$v_0(x) = \sum_\sigma \prod_1^N \sigma_j v_\sigma(x + i0\sigma) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_\sigma \prod \sigma_j v_\sigma(x + i\varepsilon\sigma) \equiv 0.$$

Wir wollen zeigen, daß $v(z)$ sich zerlegen läßt in $v(z) = \sum_1^N v_j^0(z)$, wobei $v_j^0(z)$ in bezug auf die Variable $z_j$ ganz ist, d.h. $v_j(z) \in \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{j-1} \times \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-j}\big)$.

**2.5. Satz.** *Der Kern des Homomorphismus $P$ von $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ auf $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$ besteht genau aus der Summe*

$$\boldsymbol{H}_{F,0}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{j-1} \times \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-j}\big) \cap \boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$$

*der Räume derjenigen Funktionen, welche in bezug auf eine Variable ganz sind.*

**Beweis.** Nach den Vorbemerkungen genügt es zu zeigen, daß jede Funktion $v(z) \in \boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$, für die $\sum_\sigma \prod \sigma_j v_\sigma(x + i\,o\,\sigma) = 0$ ist, zu $\boldsymbol{H}_{F,0}$ gehört. Wir setzen $v(z) = v_N(z)$ und zeigen: Aus

$$(25) \qquad v_k(z) \in \boldsymbol{H}_F,\ \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k} \prod_1^k \sigma_j v_{k,\sigma}(x_1 + i\,o\,\sigma_1, \ldots, x_k + i\,o\,\sigma_k, z_{k+1}, \ldots, z_N) \equiv 0$$

folgt $v_k(z) = v_{k-1}(z) + v_k^0(z)$ mit $v_k^0(z) \in \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{k-1} \times \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-j}\big)$, $v_{k-1}(z) \in \boldsymbol{H}_F$ und Gültigkeit von (25) mit $k-1$ an Stelle von $k$. Sei nämlich (25) erfüllt, $f(z)$ ganz holomorph, nullstellenfrei und für reelle $z_i = x_i$ sei $f(x) \geqq |v_{k,\sigma}(x + i\,o\,\sigma)| \cdot \prod_1^N (1 + x_j^2)$. Dann ist $w_{k,\sigma}(z) = \frac{v_{k,\sigma}(z)}{f(z)}$ auf $\boldsymbol{R}^N$ quadratintegrabel und stetig. $w_k(z) = \{w_{k,\sigma}(z)\}$ genügt dann auch der Relation (25) und

$$w_k^*(x_1, \ldots, x_{k-1}, z_k, \ldots, z_N) = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{k-1}} \prod_1^{k-1} \sigma_j w_{k,\sigma}(x_1 + i\,o\,\sigma_1, \ldots, x_{k-1} + i\,o\,\sigma_{k-1}, z_k, \ldots, z_N)$$

ist wegen

$$w_k^*(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + i\,o, z_{k+1}, \ldots, z_N) - w_k^*(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k - i\,o, z_{k+1}, \ldots, z_N) \equiv 0$$

eine bezüglich $z_k$ ganze analytische Funktion.

Sei $\tilde{w}_k^*(z) = (2\pi i)^{-k} \int_{\boldsymbol{R}^k} \frac{w_k^*(x_1, \ldots, x_k, z_{k+1}, \ldots, z_N)}{(x_1 - z_1) \ldots (x_k - z_k)}\, dx_1, \ldots, dx_k$ die Indikatrix von $w_k^*$. Dann gilt

$$(26) \qquad \begin{cases} w_k^*(x_1, \ldots, x_k, z_{k+1}, \ldots, z_N) \\ \qquad = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j \tilde{w}_{k\sigma}^*(x_1 + i\,\varepsilon\,\sigma_1, \ldots, x_k + i\,\varepsilon\,\sigma_k, z_{k+1}, \ldots, z_N), \end{cases}$$

wobei die Konvergenz im quadratischen Mittel und gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall erfolgt.

Da der Integrand bezüglich $x_k$ ganz analytisch ist, kann der Integrationsweg bezüglich $x_k$ in's Komplexe verlegt werden, woraus folgt, daß auch die Komponenten von $\tilde{w}_k^*(z)$ bezüglich $z_k$ zu ganzen analytischen Funktionen $\hat{w}_{k,\sigma}(z)$ fortgesetzt werden können, so daß die Funktionen $w_k^0(z) = \sum_{\sigma_k} \sigma_k \hat{w}_{k,\sigma}(z)$ zu $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big) \cap \boldsymbol{H}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{k-1} \times \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^{N-k}\big)$ gehört. Das gleiche gilt dann auch für $v_k^0(z) = f(z) \cdot w_k^0(z)$. Setzen wir nun noch $v_{k-1}(z) = v_k(z) - v_k^0(z)$,

so haben wir: $v_{k-1}(z) \in \boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$ und mit $w_{k-1}(z) = \frac{v_{k-1}(z)}{f(z)}$:

$$\sum_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}} \prod_1^k \sigma_j \, v_{k-1,\sigma}(x_1 + i0\sigma_1, \dots, x_{k-1} + i0\sigma_{k-1}, z_k, \dots, z_N)$$

$$= f(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) \times$$

$$\times \Big\{ \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}} \prod_1^{k-1} \sigma_j \, w_{k,\sigma}(x_1 + i0\sigma_1, \dots, x_{k-1} + i0\sigma_{k-1}, z_k, \dots, z_N) -$$

$$- \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j \, \widehat{w}_{k,\sigma}(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) \Big\}$$

$$= f(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) \times$$

$$\times \Big\{ w_k^*(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) - \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j \, \widehat{w}_{k,\sigma}(x_1, \dots, x_{k-1}, z_k, \dots, z_N) \Big\},$$

Hier hängt die rechte Seite analytisch von $z_k$ ab. Für $z_k = x_k$ reell gilt aber wegen (26)

$$(27) \quad \begin{cases} w_k^*(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N) = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j \, \widetilde{w}_{k,\sigma}^*(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N) \\ \qquad\qquad = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \prod_1^k \sigma_j \, \widehat{w}_{k,\sigma}(x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_N). \end{cases}$$

Damit ist gezeigt, daß $v_{k-1}(z)$ der Relation (25) für $k-1$ an Stelle von $k$ genügt. Durch Induktion folgt dann aber, daß $v(z) = v_N(z) = \sum_{j=1}^N v_j^0(z)$, wobei $v_k^0(z)$ bezüglich $z_k$ ganz ist.

**2.6. Korollar.** *Der Raum $\mathscr{D}'_F(\boldsymbol{R}^N)$ der Distribution endlicher Ordnung ist natürlich isomorph dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_F\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)/\boldsymbol{H}_{F,0}\big((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})^N\big)$. Für $\widehat{u}(z) \in \boldsymbol{H}_F$ konvergieren die Näherungen $\widehat{u}_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \prod_1^N \sigma_j \, \widehat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)$ im Sinne der starken Topologie des Raumes $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^N)$ gegen die Distribution $u$, die das natürliche Bild von $\widehat{u}$ in $\mathscr{D}'_F$ ist.*

Man erhält also für alle $\widehat{u}(z) \in \boldsymbol{H}_F$ unmittelbar eine durch $\widehat{u}$ auf dem Raum $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^N)$ der differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger definierte stetige Linearfunktion:

$$(28) \quad u[\varphi] = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\boldsymbol{R}^N} \widehat{u}_\varepsilon(x) \, \varphi(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\boldsymbol{R}^N} \Big( \sum_\sigma \prod \sigma_j \, \widehat{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma) \Big) \, \varphi(x) \, dx.$$

## § 3. Darstellung beliebiger Distributionen durch holomorphe Funktionen. Eindimensionaler Fall

Es sei $u(x)$ eine beliebige Distribution, d.h. eine stetige Linearfunktion auf dem Raum $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$. Es sei $I_m$ das Intervall $(m-1, m+1)$, $m$ eine ganze Zahl. Dann gibt es eine Zerlegung $u(x) = \sum_m u_m(x)$, wobei $u_m$ seinen Träger in $I_m$ hat, da die $I_m$ eine offene Überdeckung von $\boldsymbol{R}$ bilden. $u_m$ ist eine Distribution mit kompaktem Träger, kann also nach I, Satz 9 und 10, charakterisiert

werden durch eine in $\Omega - I_m$ holomorphe Funktion $\tilde{u}_m(z)$, derart, daß

$$|\tilde{u}_m(z)| \leqq M_m \cdot \varrho(z, I_m)^{-k_m} \quad \text{für} \quad \varrho(z, I_m) \leqq 1 \tag{29}$$

und

$$u_m(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{u}_m(x + i\varepsilon) - \tilde{u}_m(x - i\varepsilon) \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}). \tag{30}$$

Durch (30) ist aber $\tilde{u}_m(z)$ nur bis auf eine ganze Funktion bestimmt. Insbesondere können wir zu $\tilde{u}_m$ ein Polynom $h_m$ addieren, ohne die Beziehung (30) zu verletzen. $h_m$ kann aber offenbar so gewählt werden, daß

$$|\tilde{u}_m(z) - h_m(z)| < 2^{-m} \quad \text{auf} \quad |z| \leqq |m| - 2.$$

Dann ist die Reihe $\sum_m g_m(z)$, $g_m(z) = \tilde{u}_m(z) - h_m(z)$, auf allen kompakten Teilmengen der oberen und der unteren Halbebene gleichmäßig konvergent, stellt also eine Funktion $g(z) \in \boldsymbol{H}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})$ dar. Auf jedem kompakten Intervall aus $\boldsymbol{C}$ konvergiert die Reihe nach Streichen endlich vieler Glieder ebenfalls gleichmäßig. Daher gilt auch

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \{g(x + i\varepsilon) - g(x - i\varepsilon)\} \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}). \tag{31}$$

Denn für ein $\varphi \in \mathscr{D}$ mit Träger in der kompakten Menge $K$ gilt

$$\int \{g(x + i\varepsilon) - g(x - i\varepsilon)\} \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_K \left\{ \sum_{|m| \leqq N_K} \tilde{u}_m(x + i\varepsilon) - \tilde{u}_m(x - i\varepsilon) - 2i\varepsilon\, h_m(x + i\vartheta_x \varepsilon) \right\} \varphi(x)\, dx + \eta_{N_K}(\varepsilon),$$

wobei $K < (-N_K + 1, N_K - 1)$ und

$$\eta_{N_K}(\varepsilon) = \int \sum_{|m| > N_K} \{g_m(x + i\varepsilon) - g_m(x - i\varepsilon)\} \varphi(x)\, dx$$

durch Wahl von $N_K$ für alle $\varepsilon < 1$ beliebig klein gemacht werden kann. Es gilt also

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \{g(x + i\varepsilon) - g(x - i\varepsilon)\} \varphi(x)\, dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \sum_{|m| < N} \{\tilde{u}_m(x + i\varepsilon) - \tilde{u}_m(x - i\varepsilon)\} \varphi(x)\, dx = \int u(x) \varphi(x)\, dx = u[\varphi]$$

und die Konvergenz erfolgt gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$.

Die Funktion $g(z)$ läßt sich nun abschätzen auf $|z| \leqq m_0 - 2$ durch

$$|g(z)| \leqq \sum_{|m| \leqq m_0} (|\tilde{u}_m(z)| + |h_m(z)|) + \sum_{|m| > m_0} |\tilde{u}_m(z) - h_m(z)|$$
$$\leqq \sum_{|m| \leqq m_0} M_m \cdot |\operatorname{Im}(z)|^{-k_m} + \sum_{|m| \leqq m_0} |h_m(z)| + \sum_{|m| > m_0} 2^{-m}$$
$$\leqq N_{m_0} \cdot |\operatorname{Im}(z)|^{-n_{m_0}} \quad \text{für} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leqq 1.$$

Man kann dann offenbar in $0 \leqq r < \infty$ stetige, monoton wachsende Funktionen $M(r)$, $n(r)$ finden, derart, daß

$$|g(z)| \leqq M(|z|) \cdot |\operatorname{Im}(z)|^{-n(|z|)} \quad \text{für alle } z \text{ mit } 0 < |\operatorname{Im}(z)| \leqq 1. \tag{32}$$

**3.1. Satz.** *Zu jeder Distribution $u$ gibt es eine holomorphe Funktion $g(z)$, die einer Abschätzung (32) genügt und für die gilt $u(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \{g(x+i\varepsilon) - g(x-i\varepsilon)\}$ im Sinne der starken Konvergenz in $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$.*

**3.2. Satz.** *Die folgenden Bedingungen für Funktionen aus $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ sind äquivalent:*

(a) $|g(z)| \leqq M(|z|) \cdot |y|^{-n(|z|)}$ *für alle $z = x+iy$ mit $0 < |y| \leqq 1$, wobei $M(r)$, $n(r)$ geeignete stetige Funktionen sind.*

(b) *Auf jedem kompakten Intervall $K \subset \boldsymbol{R}$ hat ein endlichfaches Integral der Komponenten $g_\sigma(z)$ noch stetige Randwerte ($\sigma = \pm 1$).*

(c) *Auf jedem Streifen $|x| \leqq k$, $0 < |y| \leqq 1$, ist ein endlichfaches Integral der Komponenten $g_\sigma(z)$ von $g(z)$ beschränkt.*

**Beweis.** (a) $\rightarrow$ (b) folgt durch fortgesetzte Integration (vgl. I, Beweis von Satz 10), die Umkehrung durch Anwendung der Cauchyschen Integralformel. Die Äquivalenz von (b) und (c) ist evident.

$\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ sei der Teilraum von $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$, der aus all denjenigen Funktionen $g(z)$ besteht, die einer der äquivalenten Bedingungen aus 3.2. genügen.

Es gilt dann

**3.3. Satz.** *Für jedes $\hat{g} \in \boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ existiert $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \{\hat{g}(x+i\varepsilon) - \hat{g}(x-i\varepsilon)\}$ im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$, stellt also eine Distribution $g(x)$ dar. Die Abbildung*

$$\hat{g} \rightarrow g(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \{\hat{g}(x+i\varepsilon) - \hat{g}(x-i\varepsilon)\} \tag{33}$$

*ist ein Homomorphismus von $\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ auf $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$ (als $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$-Moduln). Der Kern dieses Homomorphismus besteht genau aus allen ganzen Funktionen. Der Distributionenraum $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$ ist also natürlich isomorph zu dem Quotientenraum $\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$.*

**Beweis.** Aus (b) und der Tatsache, daß für jede beschränkte Menge $B \subset \mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ alle $\varphi \in B$ ihren Träger in einer festen kompakten Menge $K = K(B)$ haben und dort alle Ableitungen $\varphi^{(m)}$, $\varphi \in B$, gleichmäßig beschränkt sind, folgt die Existenz von $\lim \{\hat{g}(x+i\varepsilon) - \hat{g}(x-i\varepsilon)\}$ im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$. Dieser Limes stellt also eine Distribution $g(x)$ dar. Daß die Abbildung $\hat{g} \rightarrow g$ ein Homomorphismus der linearen Räume $\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$ und $\mathscr{D}'(\boldsymbol{R})$ ist, ist evident. Man sieht aber auch leicht, daß es ein Homomorphismus der beiden Räume als $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{C})$-Moduln ist, denn für ganzes $h(z)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim \int \{h(x+i\varepsilon)\,\hat{g}(x+i\varepsilon) - h(x-i\varepsilon)\,\hat{g}(x-i\varepsilon)\}\,\varphi(x)\,dx \\
&= \lim \int \{\hat{g}(x+i\varepsilon) - \hat{g}(x-i\varepsilon)\}\,h(x)\,\varphi(x)\,dx + \\
&\quad + \lim \int \{h(x+i\varepsilon) - h(x)\}\,g(x+i\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx - \\
&\quad - \lim \int \{h(x-i\varepsilon) - h(x)\}\,g(x-i\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx = g[h\cdot\varphi].
\end{aligned}$$

Denn die beiden letzten Integrale streben mit $\varepsilon \rightarrow 0$ stark gegen 0, wie man unmittelbar durch partielle Integration einsieht.

Es sei nun $\hat{g}(z)$ eine Funktion aus $\boldsymbol{H}_*(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})$, für die $g(x)=\lim\{\hat{g}(x+i\varepsilon)-\hat{g}(x-i\varepsilon)\}=0$ ist, und es sei $K$ ein kompaktes Intervall. Dann hat $\hat{g}_{\pm}^{(-m)}(z)$ für geeignetes $m$ in der Umgebung von $K$ stetige Randwerte auf $\boldsymbol{R}$. Da $g=0$ ist, muß $f(x)=\hat{g}_{+}^{(-m)}(x+i0)-\hat{g}_{-}^{(-m)}(x-i0)$ auf $K$ mit einem Polynom höchstens $(m-1)$-ten Grades übereinstimmen. Da man aber die Integrationskonstanten bei der Bildung der unbestimmten Integrale von $\hat{g}$ beliebig wählen kann, läßt sich stets erreichen, daß $f(x)\equiv 0$ ist. $\hat{g}_{+}^{(-m)}(z)$ und $\hat{g}_{-}^{(-m)}(z)$ haben dann also auf $K$ die gleichen stetigen Randwerte, sind also Teile einer eindeutigen, auf $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})\cup K$ holomorphen Funktion. Das gleiche gilt dann aber auch für $\hat{g}_{+}(z)$ und $\hat{g}_{-}(z)$, und da $K$ ein beliebiges Intervall war, muß $\hat{g}(z)$ eine ganze Funktion sein. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Die Darstellung der Distributionen unendlicher Ordnung im Raume von mehreren Variablen soll in einer späteren Note behandelt werden.

**Anhang.** Beim Beweis der Sätze 1.3. und 2.4. haben wir Gebrauch gemacht von folgendem

**Lemma.** Sei $f(x_1,\ldots,x_N)$ eine stetige Funktion, für die die Ableitung $f^{(m)}(x)=\dfrac{\partial^{|m|}}{\partial x^m}f(x)=0$ ist (Ableitung im Sinne der Distributionstheorie). Dann läßt sich $f$ darstellen in der Form

$$f(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{m_j-1}x_j^k\cdot g_{jk}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_N), \tag{34}$$

wobei die $g_{jk}$ stetige Funktionen von $N-1$ Variablen sind. Ist $f(x)$ von langsamem Wachstum (d.h. durch ein Polynom majorisiert), so können auch die $g_{jk}$ als langsam wachsende Funktionen gewählt werden.

**Beweis.** O.B.d.A. können wir annehmen, daß $m\geqq e$, und $f(x)$ mit seinen Ableitungen vom Rang 1 stetig (und langsam wachsend) ist, und dann zeigen, daß auch die $g_{jk}$ so gewählt werden können, daß sie mit ihren Ableitungen vom Rang 1 stetig (und langsam wachsend) sind. (Man betrachte etwa an Stelle von $f$ und $m$ $F(x)=\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_N}f(y)\,d^Ny$ und $m'=m+e$.)

Aus $f^{(m)}(x)\equiv 0$ folgt, daß $f$ sich schreiben läßt in der Form

$$f(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{m_j-1}x_j^k\cdot a_{jk}(x_{[j]}), \tag{35}$$

wobei $a_{jk}(x_{[j]})$ Distributionen sind, welche von $x_j$ unabhängig sind. Durch Induktion nach $\mu=\mu(m)=\sum_{j=1}^{N}(m_j-1)$ zeigen wir, daß die $a_{jk}$ sogar stetig (mit ihren Ableitungen vom Rang 1) gewählt werden können.

a) Sei $\mu=0$, also $m=e$, $f(x_1,\ldots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}a_j(x_{[j]})$. Dann gilt:

$$\frac{\partial^{N-1}f(x)}{\partial x_1\ldots\partial x_{j-1}\partial x_{j+1}\ldots\partial x_N}=\frac{\partial^{N-1}a_j(x_{[j]})}{\partial x_1\ldots\partial x_{j-1}\partial x_{j+1}\ldots\partial x_N}=c_j(x_{[j]})$$

ist eine stetige Funktion, die von $x_j$ nicht abhängt. $b_j(x_{[j]}) = \int_0^{x_{[j]}} c_j(\xi_{[j]})\, d^{N-1}\xi_{[j]}$ ist stetig mit seinen Ableitungen vom Rang 1, $a_j - b_j = \sum_{k=1}^{N} c_{jk}$, wobei $c_{jk}$ eine von $x_j$ und $x_k$ unabhängige Distribution ist. Auf $h(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{N} b_j(x_{[j]}) = \sum_{jk} c_{jk}(x_{[j,k]})$ wenden wir wiederum eine analoge Schlußweise an und erhalten schließlich eine Darstellung

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} b_j(x_{[j]}) + \sum_{j_1, j_2=1}^{N} b_{j_1 j_2}(x_{[j_1 j_2]}) + \cdots + \sum_{j_1 \ldots j_N=1}^{N} b_{j_1 \ldots j_N},$$

wobei alle Summanden mit ihren Ableitungen vom Rang 1 stetig sind.

b) Nun sei für $\mu < \mu_0$ die Behauptung gültig und bewiesen, daß die Koeffizienten $a_{jk}$ für maximales $k = m_i - 1 = \mathrm{Rg}(m) - 1$ in (35) durch Addition von Distributionen $c_{j,l}$, die von $x_j$ und $x_l$ unabhängig sind, in die Funktionen $g_{jk}$ der Behauptung übergeführt werden können. Es sei nun $f^{(m)}(x) \equiv 0$, $\mu(m) = \mu_0 = \sum_{j=1}^{N} (m_j - 1)$. Dann gilt also eine Darstellung (35) und es ist mindestens ein $m_j$, etwa $m_i > 1$.

$$\Delta_i f(x) = f(x + e_i) - f(x) = \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{m_j - 1} x_j^k \cdot \Delta_i a_{jk}(x_{[j]}) + \sum_{k=1}^{m_i - 1} \Delta_i x_i^k \cdot a_{ik}(x_{[i]}).$$

Nach Induktionsannahme läßt sich nun aber $a_{i, m_i - 1}(x_{[i]})$ als Koeffizient der höchsten Potenz von $x_i$ in der letzten Summe [bis auf den Faktor $(m_i - 1) \neq 0$] schreiben $a_{i, m_i - 1} = g_{i, m_i - 1} + \sum c_{ik}(x_{[i,k]})$. Da die Glieder $x_i^{m_i - 1} \cdot c_{ik}(x_{[i,k]})$ mit $a_{k,0}(x_{[k]})$ zusammengefaßt werden können, gestattet $g(x) = f(x) - x_i^{m_i - 1} \cdot g_{i, m_i - 1}(x_{[i]})$ nach Induktionsannahme die gewünschte Darstellung und damit ist dann auch $f(x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m_j - 1} x_j^k g_{jk}(x)$, wobei die $g_{jk}$ mit ihren Ableitungen vom Rang 1 stetig sind. Für maximales $k$ gehen auch die $g_{jk}$ aus den $a_{jk}$ durch Addition von Distributionen in $N-2$ Variablen hervor.

Aus dem Beweis ergibt sich zugleich, daß alle Koeffizienten $g_{jk}$ langsam wachsen, wenn $f$ und seine Ableitungen vom Rang 1 langsam wachsen.

## Literatur


[1] KÖTHE, G.: Dualität in der Funktionentheorie. J. reine angew. Math. **191**, 30—49 (1953).

[2] — Die Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **57**, 13—33 (1952).

[3] SATO, M.: Theory of Hyperfunctions I. J. Fac. Sci. Tokyo **8**, 139—193 (1959/60).

[4] SCHWARTZ, L.: Theorie des Distributions I, II. Paris, 1950, 1951.

[5] TILLMANN, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen, I. Math. Z. **59**, 61—83 (1953); II. Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **76**, 5—21, (1961).

[6] LUSZCZKI, Z., u. Z. ZIELESNY: Distributionen der Räume $\mathscr{D}'_{L^p}$ als Randverteilungen analytischer Funktionen. Colloq. Math. **8**, 125—131 (1961).


*Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität*

*(Eingegangen am 13. April 1961)*

Seifert, H.
Math. Zeitschr. 77, 125—130 (1961)

# Zum Satz von O. Bonnet über den Durchmesser einer Eifläche

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

Herbert Seifert

In dieser Note wird die von O. Bonnet herrührende Methode der konjugierten Punkte auf geodätischen Linien zur Herleitung von Bedingungen für die Kompaktheit symmetrischer Räume und Liescher Gruppen benutzt.

Der Satz von O. Bonnet lautet:

*Wenn die Gaußsche Krümmung einer Eifläche $M^2$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes in jedem Punkte $\geqq 1:A^2$ ist, dann ist die geodätische Entfernung je zweier Punkte von $M^2$ höchstens gleich $\pi A$.*

Der Beweis verläuft folgendermaßen (vgl. z.B. [*1*], S. 218): $p, q$ seien zwei beliebige Punkte von $M^2$. Es gibt einen kürzesten geodätischen Bogen $g$ von $p$ nach $q$. Auf $g$ kann wegen seiner Minimaleigenschaft kein zu $p$ konjugierter Punkt liegen. Anderseits hat der auf $p$ folgende konjugierte Punkt (auf der Verlängerung von $g$) von $p$ eine geodätische Entfernung $\leqq \pi A$, wie sich aus der Jacobischen Differentialgleichung ergibt, welche die zu $g$ infinitesimal benachbarten Geodätischen und damit die konjugierten Punkte auf $g$ festlegt. Somit hat $g$ höchstens die Länge $\pi A$.

Dieser Satz und sein Beweis sind auf $n$-dimensionale Mannigfaltigkeiten übertragen worden ([*5*], [*8*], [*7*]):

*Wenn in einer vollständigen*[1]) *$n$-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit $M^n$ die Riemannsche Krümmung jedes zweidimensionalen Flächenelementes $\geqq 1:A^2$ ist, dann ist die geodätische Entfernung je zweier Punkte von $M^n$ höchstens gleich $\pi A$.*

Der Beweis gelingt durch Zurückführung auf den Fall $n = 2$. Zwei beliebige Punkte $p$, $q$ von $M^n$ werden durch einen kürzesten geodätischen Bogen $g$

---

[1]) Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit $M^n$ heißt vollständig, wenn man jeden geodätischen Bogen nach beiden Seiten unbegrenzt fortsetzen kann (Hopf-Rinow [*4*]). Damit gleichbedeutend: Jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge von $M^n$ ist kompakt. Dabei bezieht sich „beschränkt" auf die Entfernungsfunktion $\varrho(x, y)$, die durch die untere Grenze der Längen der Verbindungskurven von $x$ und $y$ gegeben ist. Auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit kann man je zwei Punkte durch mindestens einen kürzesten Bogen verbinden. Wir nehmen an, daß die Riemannschen Mannigfaltigkeiten von der Klasse $C^\infty$ sind (unendlich oft stetig differenzierbare Koordinatentransformationen und unendlich oft stetig differenzierbare Komponenten des Maßtensors).

verbunden. $g$ läßt sich in eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit $M^2$ einbetten, so daß die zweidimensionalen Tangentialelemente von $M^2$ längs $g$ parallel sind. Nach dem Lemma von SYNGE ([9], Theorem XIII) ist die Gaußsche Krümmung von $M^2$ längs $g$ gleich der Riemannschen Krümmung des Tangentialelementes, also $\geqq 1:A^2$, woraus wie oben folgt, daß $g$ höchstens die Länge $\pi A$ haben kann.

Bei diesem Beweise wird die Bedingung, daß die Riemannsche Krümmung $\geqq 1:A^2$ sein soll, nicht voll ausgenutzt. Es genügt zu wissen, daß es ein $A>0$ mit den folgenden Eigenschaften gibt: 1. Durch jeden Vektor $\xi$ von $M^n$ kann ein Flächenelement $f$ gelegt werden, dessen Riemannsche Krümmung $\geqq 1:A^2$ ist. 2. Alle Flächenelemente, die aus $f$ durch Parallelverschiebung längs der durch $\xi$ bestimmten Geodätischen entstehen, haben Riemannsche Krümmung $\geqq 1:A^2$. Diese Bemerkung führt zu

SATZ 1. *Wenn in einer zusammenhängenden symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeit $M^n$ durch jeden Vektor ein Flächenelement von positiver Riemannscher Krümmung gelegt werden kann, dann ist $M^n$ kompakt.*

Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit $M^n$ heißt nach E. CARTAN [2] symmetrisch, wenn es zu jedem Punkt $p\in M^n$ eine Isometrie von $M^n$ auf sich gibt, bei der $p$ festbleibt, während jeder in $p$ angreifende Vektor seine Richtung umkehrt (Inversion an $p$). Sicher ist dann $M^n$ vollständig, denn ein geodätischer Bogen $\widehat{pq}$ kann durch Inversion an $q$ um seine eigene Länge verlängert werden. Ferner ist klar, daß auf einer symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeit jeder gegen Isometrien invariante Tensor ungerader Stufe identisch verschwinden muß, denn die auf ein $n$-Bein $e_1, \ldots, e_n$ in $p$ bezogenen Komponenten eines Tensors sind auf Grund der Inversion an $p$ gleich den entsprechenden Komponenten in bezug auf das $n$-Bein $-e_1, \ldots, -e_n$, anderseits unterscheiden sich aber bei einem Tensor ungerader Stufe die Komponenten in bezug auf die beiden $n$-Beine nach der Transformationsregel eines Tenors durch das Vorzeichen. Insbesondere verschwindet die kovariante Ableitung des Krümmungstensors (Tensor 5ter Stufe), woraus sich ergibt, daß die Komponenten des Krümmungstensors ungeändert bleiben, wenn man das Bezugs-$n$-Bein parallel verschiebt. Somit ist die Riemannsche Krümmung eines Flächenelementes invariant gegen Parallelverschiebung (vgl. [2]).

Zum Beweise von Satz 1 genügt es zu zeigen, daß die oben genannten Bedingungen 1 und 2 erfüllt sind: Zu jedem in $p\in M^n$ angreifenden Vektor $\xi$ gibt es ein Flächenelement maximaler Riemannscher Krümmung $k(\xi)$. Diese hängt stetig von $\xi$ ab und ist nach Voraussetzung $>0$. Das Minimum von $k(\xi)$ für alle durch $p$ gehenden Vektoren wird für einen Vektor $\xi_0$ angenommen. Setzt man $k(\xi_0)=1:A^2$, so ist $A$ unabhängig von $p$ wegen der Invarianz der Riemannschen Krümmung bei Parallelverschiebung. Somit kann man durch jeden Vektor von $M^n$ ein Flächenelement legen, dessen Riemannsche Krümmung $\geqq 1:A^2$ ist, d.h. Bedingung 1 ist erfüllt. Bedingung 2 ergibt sich unmittelbar aus der Invarianz der Riemannschen Krümmung gegen Parallel-

verschiebung. Somit haben je zwei Punkte von $M^n$ eine geodätische Entfernung $\leqq \pi A$, woraus wegen der Vollständigkeit von $M^n$ die Kompaktheit folgt.

Satz 1 gestattet eine Anwendung auf Liesche Gruppen. Auf der zusammenhängenden Lieschen Gruppe $G$ möge es eine Riemannsche Metrik geben, die gegen Rechts- und Linkstranslationen von $G$ invariant ist (biinvariante Metrik). Bekanntlich wird $G$ dadurch zu einer symmetrischen Riemannschen Mannigfaltigkeit, was man folgendermaßen erkennt: Die das Einselement $e$ von $G$ festlassende Abbildung $x \to x^{-1}$ ist eine Isometrie, denn für eine differenzierbare Kurve $x(t)$ erhält man durch Differentiation der Identität $x(t) \cdot x^{-1}(t) = e$

$$\frac{dx(t)}{dt} \cdot x^{-1}(t) + x(t) \cdot \frac{dx^{-1}(t)}{dt} = 0, \tag{1}$$

wenn allgemein mit $\xi \cdot a$ bzw. $a \cdot \xi$ derjenige Vektor bezeichnet wird, der aus dem Vektor $\xi$ durch Rechtstranslation bzw. Linkstranslation mit $a \in G$ hervorgeht. Übergang zu den Beträgen liefert wegen der Biinvarianz der Metrik

$$\left| \frac{dx(t)}{dt} \right| = \left| \frac{dx^{-1}(t)}{dt} \right|,$$

d.h. $x \to x^{-1}$ ist eine Isometrie. Bei ihr werden die in $e$ angreifenden Vektoren umgekehrt, was man erkennt, wenn man in (1) $x(0) = e$ annimmt und $t = 0$ setzt. $x \to x^{-1}$ ist also die Inversion an $e$. Die Inversion an $a \in G$ erhält man als Produkt der Isometrien $x \to xa^{-1}$, $x \to x^{-1}$, $x \to xa$.

Die Riemannsche Krümmung von $G$ ergibt sich aus dem

Hilfssatz. *Sind $\xi_0, \eta_0$ zwei im Einselement von $G$ angreifende aufeinander senkrechte Einheitsvektoren, so ist die Riemannsche Krümmung des von ihnen aufgespannten Flächenelementes*

$$K(\xi_0, \eta_0) = \tfrac{1}{4} \langle [\xi_0, \eta_0], [\xi_0, \eta_0] \rangle .$$

*Dabei bezeichnet $[\ ,\ ]$ das Lie-Produkt (s. unten) und $\langle\ ,\ \rangle$ das skalare Produkt.*

Beweis. 1. Das Lie-Produkt zweier auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M^n$ definierten Vektorfelder $\xi$, $\eta$ ist in einem lokalen Koordinatensystem $x^1, \ldots, x^n$ gegeben durch

$$[\xi, \eta]^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \eta^k - \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} \xi^k. \tag{2}$$

Ist $M^n$ eine Liesche Gruppe $G$, so bestimmt jeder im Einselement $e$ angreifende Vektor $\xi_0$ umkehrbar eindeutig ein rechtsinvariantes Vektorfeld $\xi$, dem er angehört. Das Lie-Produkt zweier in $e$ angreifenden Vektoren $\xi_0, \eta_0$ soll dann mit Hilfe der zugehörigen rechtsinvarianten Vektorfelder $\xi, \eta$ nach Formel (2) gebildet werden. $[\xi_0, \eta_0]$ ist also der in $e$ angreifende Vektor des rechtsinvarianten Feldes $[\xi, \eta]$. Dafür kann man auch schreiben

$$[\xi_0, \eta_0] = \frac{d}{dt} \left( \xi_0 \cdot y(t) - y(t) \cdot \xi_0 \right)_{t=0} \tag{3}$$

oder auch

$$[\xi_0, \eta_0] = \frac{d}{dt} \left( y^{-1}(t) \cdot \xi_0 \cdot y(t) \right)_{t=0}, \tag{4}$$

wenn $y(t)$ eine differenzierbare Kurve mit dem Tangentenvektor $\eta_0$ im Punkte $y(0)=e$ ist. Die rechte Seiten von (3) ist sinnvoll, weil der Ausdruck in der Klammer für $t=0$ verschwindet. Ist auf $G$ eine biinvariante Metrik mit dem skalaren Produkt $\langle\ ,\ \rangle$ gegeben, so gilt für drei beliebige in $e$ angreifende Vektoren $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$

$$\langle[\xi_0,\eta_0],\zeta_0\rangle+\langle\eta_0,[\xi_0,\zeta_0]\rangle=0. \tag{5}$$

Man gewinnt diese Formel aus der Invarianzbedingung

$$\frac{d}{dt}\langle x^{-1}(t)\cdot\eta_0\cdot x(t),\quad x^{-1}(t)\cdot\zeta_0\cdot x(t)\rangle=0$$

mit Hilfe von (4), wenn man $x(0)=e$ annimmt und $\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=\xi_0$ setzt.

2. Ist auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M^n$ ein linearer Zusammenhang mit den Komponenten $\Gamma^i_{kl}$ gegeben, so lautet die Formel für das kovariante Differential eines kontravarianten Vektorfeldes $\xi$ in lokalen Koordinaten $x^1,\ldots,x^n$

$$[D(\xi)]^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}dx^k+\Gamma^i_{kl}\xi^k dx^l, \tag{6}$$

somit die kovariante Ableitung von $\xi$ in Richtung $\eta$

$$[D_\eta(\xi)]^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\eta^k+\Gamma^i_{kl}\xi^k\eta^l. \tag{7}$$

Offenbar ist der lineare Zusammenhang genau dann symmetrisch, $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$, wenn für beliebige Vektorfelder $\xi$, $\eta$ gilt

$$D_\eta(\xi)-D_\xi(\eta)=[\xi,\eta]. \tag{8}$$

Auf einer Lieschen Gruppe $G$ pflegt man nach E. CARTAN [3] gewisse durch die Gruppenstruktur gegebene lineare Zusammenhänge zu betrachten: $D^{(r)}$ bzw. $D^{(l)}$ ist die infinitesimale Änderung von $\xi$ gegenüber dem durch Rechts- bzw. Linkstranslation mitgeführten Vektor. Diese linearen Zusammenhänge sind im allgemeinen nicht symmetrisch, wohl aber $D=\frac{1}{2}(D^{(r)}+D^{(l)})$. In der Tat hat man für beliebige rechtsinvariante Vektorfelder $\xi$, $\eta$ wegen $D^{(r)}(\xi)=D^{(r)}(\eta)=0$: $D_\xi(\eta)=\frac{1}{2}D^{(l)}_\xi(\eta)=\frac{1}{2}d_\xi\left(\eta(x)-x\cdot\eta(e)\right)=\frac{1}{2}d_\xi\left(\eta(e)\cdot x-x\cdot\eta(e)\right)$, also nach (3)

$$D_\xi(\eta)=\tfrac{1}{2}[\eta,\xi] \tag{9}$$

im Punkte $x=e$ und daher wegen der Rechtsinvarianz der beiden Seiten von (9) in allen Punkten von $G$. Analog ist

$$D_\eta(\xi)=\tfrac{1}{2}[\xi,\eta]$$

und daher

$$D_\eta(\xi)-D_\xi(\eta)=[\xi,\eta],$$

was nach (8) gleichbedeutend mit der Symmetrie von $D$ ist. Ist nun auf $G$ weiter eine biinvariante Metrik gegeben, so verschwinden für den Maßtensor die kovarianten Differentiale $D^{(r)}$ und $D^{(l)}$, also auch $D$. Nach dem Hauptsatz

der Riemannschen Geometrie gibt es aber nur einen linearen symmetrischen Zusammenhang, für den das kovariante Differential des Maßtensors verschwindet. Dieser ist also durch $D$ gegeben.

3. Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $M^n$ hängt der Krümmungstensor $R^i_{.klm}$ mit der zur Metrik gehörigen kovarianten Differentiation $D$ durch die Formel zusammen:

$$[(D_\zeta D_\eta - D_\eta D_\zeta - D_{[\eta,\zeta]})(\xi)]^i = R^i_{.klm}\,\xi^k \eta^l \zeta^m. \tag{10}$$

Dabei sind $\xi, \eta, \zeta$ beliebige Vektorfelder. Anderseits ist die Riemannsche Krümmung $K(\xi, \eta)$ des von zwei aufeinander senkrechten Einheitsvektoren $\xi, \eta$ aufgespannten Flächenelementes gegeben durch

$$K(\xi, \eta) = -R_{iklm}\,\xi^i \eta^k \xi^l \eta^m = -R^i_{.klm}\,\xi_i \eta^k \xi^l \eta^m,$$

also nach (10)

$$K(\xi, \eta) = -\langle (D_\eta D_\xi - D_\xi D_\eta - D_{[\xi,\eta]})(\eta), \xi \rangle. \tag{11}$$

Ist $M^n$ speziell eine Liesche Gruppe mit biinvarianter Metrik, so folgt aus (11), (9) und (5)

$$K(\xi_0, \eta_0) = \tfrac{1}{4} \langle [[\eta_0, \xi_0], \eta_0], \xi_0 \rangle = \tfrac{1}{4} \langle [\xi_0, \eta_0], [\xi_0, \eta_0] \rangle.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Ist wieder $G$ eine Liesche Gruppe mit biinvarianter Metrik, so kann man nach dem Hilfssatz durch jeden in $e$ angreifenden Vektor $\xi_0$ ein Flächenelement positiver Riemannscher Krümmung legen, es sei denn, daß $\xi_0$ mit allen Vektoren $\eta_0$ das Lie-Produkt 0 ergibt, d.h. daß $\xi_0$ dem Zentrum der Lie-Algebra von $G$ angehört.

Aus Satz 1 folgt somit

Satz 2. *Wenn eine zusammenhängende Liesche Gruppe $G$ eine biinvariante Riemannsche Metrik gestattet und das Zentrum ihrer Lie-Algebra verschwindet, dann ist $G$ kompakt.*

Da das Verschwinden des Zentrums der Lie-Algebra von $G$ gleichbedeutend mit der Diskretheit des Zentrums ist, kann man Satz 2 auch so formulieren:

Satz 2'. *Eine zusammenhängende Liesche Gruppe, die eine biinvariante Riemannsche Metrik gestattet und diskretes Zentrum besitzt, ist kompakt.*

Weiter folgt aus Satz 2 der

Satz von H. Weyl [*10*]. *Die Fundamentalgruppe einer halbeinfachen kompakten Lieschen Gruppe ist endlich.*

Beweis. Jede kompakte Liesche Gruppe kann mit einer biinvarianten Metrik versehen werden (vgl. z.B. [*6*], Satz 99). Hebt man die biinvariante Metrik in die universelle Überlagerung $\hat{G}$ von $G$ hoch, so erhält man eine biinvariante Metrik in $\hat{G}$. Ist nun $G$ halbeinfach, so hat die Lie-Algebra von $G$ und damit auch die von $\hat{G}$ verschwindendes Zentrum. Nach Satz 2 ist daher $\hat{G}$ kompakt, also endlichblättrig über $G$.

## Literatur

[1] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlin 1945.
[2] Cartan, E.: Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. Bull. Soc. Math. France **54**, 214—264 (1926); **55**, 114—134 (1927).
[3] — La géometrié des groupes de transformations. J. Math. Pures Appl. **6**, 1—119 (1927).
[4] Hopf, H., u. W. Rinow: Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comm. Math. Helv. **3**, 209—225 (1931).
[5] Myers, S. B.: Riemannian manifolds in the large. Duke Math. J. **1**, 39—49 (1935).
[6] Pontrjagin, L. S.: Topologische Gruppen II. Leipzig 1958.
[7] Preissmann, A.: Quelques propriétés globales des espaces de Riemann. Comm. Math. Helv. **15**, 175—216 (1943).
[8] Schoenberg, J. M.: Some applications of the calculus of variation to Riemannian geometry. Ann. Math. (2) **33**, 485—495 (1932).
[9] Synge, J. L.: The first and second variations of the length in Riemannian space. Proc. Lond. Math. Soc. **25**, 247—264 (1926).
[10] Weyl, H.: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III. Math. Z. **23**, 271—304 (1925); **24**, 328—395 (1926).

*Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität*

*(Eingegangen am 17. April 1961)*

Herrmann, O.
Math. Zeitschr. 77, 131—134 (1961)

# Geodätische Untermannigfaltigkeiten der Dodekaederräume

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

Oskar Herrmann

Bei der Untersuchung der Verteilung der Längen geodätischer Lote von einem Punkt auf eine Untermannigfaltigkeit einer hyperbolischen Raumform ergab sich die Frage, ob es in jeder dreidimensionalen hyperbolischen Raumform eine geschlossene zweidimensionale total-geodätische Untermannigfaltigkeit gibt [*1*]. Es ist aus der Konstruktion der von Frank Löbell [*2, 3*] angegebenen dreidimensionalen geschlossenen hyperbolischen Raumformen unmittelbar ersichtlich, daß es in diesen Beispielen hyperbolischer geschlossener Raumformen zweidimensionale geschlossene total-geodätische Untermannigfaltigkeiten gibt. Für den hyperbolischen Dodekaederraum [*4*] wurde diese Frage bisher nicht aufgeworfen.

In dieser Note soll gezeigt werden, daß es in dem hyperbolischen Dodekaederraum eine geschlossene zweidimensionale Untermannigfaltigkeit gibt; diese Untermannigfaltigkeit ist eine nicht-orientierbare Fläche vom topologischen Geschlecht 20. Die Konstruktion dieser Untermannigfaltigkeit kann in analoger Weise im sphärischen Dodekaederraum durchgeführt werden. Man findet, daß die im folgenden konstruierte Untermannigfaltigkeit des sphärischen Dodekaederraumes eine geschlossene nicht-orientierbare Fläche vom topologischen Geschlecht 1 ist.

Der Vollständigkeit halber wird an die Konstruktion der beiden Dodekaederräume erinnert. Im dreidimensionalen hyperbolischen (sphärischen) Raum verschaffe man sich zunächst ein Dodekaeder mit einem Kantenwinkel $\gamma = 2\pi/5$ (bzw. $\gamma = 2\pi/3$). Die Paare von Gegenseiten werden durch eine Schraubung längs des gemeinsamen Lotes mit dem Schraubwinkel $3\pi/5$ (bzw. $\pi/5$) auf einander bezogen. Der Schraubsinn ist hierbei ein für allemal fest zu wählen. Aufeinander bezogene Punkte werden identifiziert. In Fig. 1′ (bzw. Fig. 1″). sind zu identifizierende Kanten und Ecken im Netz der Oberfläche des Dodekaeders gleich bezeichnet. In dieser Abbildung ist die Zeichenebene durch einen unendlich fernen Punkt zu einer Sphäre zu schließen. Durch obige Identifizierung entsteht ein geschlossener topologischer Raum. Er heißt der hyperbolische (sphärische) Dodekaederraum. Der Dodekaederraum ist eine Raumform, denn die Kantenwinkel ergänzen sich stets zu $2\pi$, wie man Fig. 1′ (bzw. Fig. 1″) entnimmt. Da die Seiten durch eigentliche Bewegungen aufeinander bezogen sind, bei denen das Innere des Dodekaeders auf angrenzende Dodekaeder abgebildet wird, folgt hieraus die Homogenität in den Ecken[1]).

[1]) Einzelheiten dieser Konstruktion sind [*4*] zu entnehmen.

Das Bild einer Seitenfläche im Dodekaederraum wird im folgenden Seitenfünfeck genannt. Es gibt genau sechs Seitenfünfecke. Eine Ebene des hyperbolischen (bzw. sphärischen) Raumes, die durch eine Dodekaederkante geht und den zugehörigen Kantenwinkel halbiert, geht auch durch den Mittelpunkt

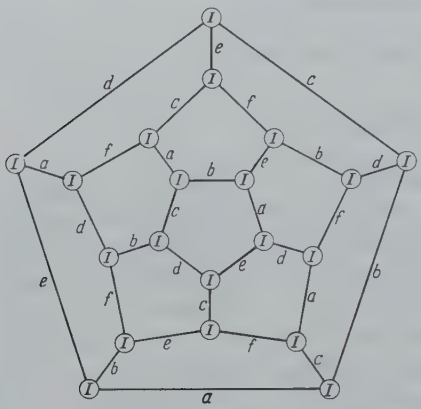

Fig. 1′

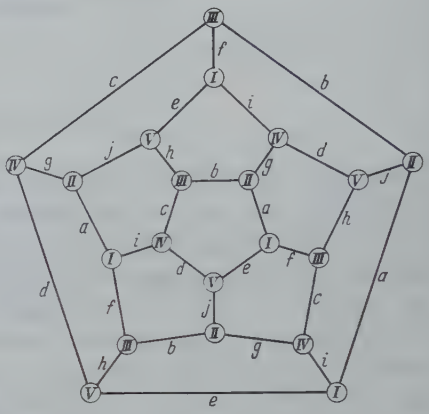

Fig. 1″

des Dodekaeders und durch die gegenüberliegende Kante. Der Durchschnitt des Dodekaeders mit einer solchen Ebene ist ein Sechseck. Dessen Bild im Dodekaederraum heißt ein Diametralsechseck. In Fig. 2 ist ein Diametralsechseck gezeichnet. Die mit $k$ bezeichneten Kanten sind Bilder von Dodekaederkanten, während die mit $h$ bezeichneten Kanten Bilder von Fünfeckshöhen sind. Alle fünfzehn Diametralsechsecke sind kongruent.

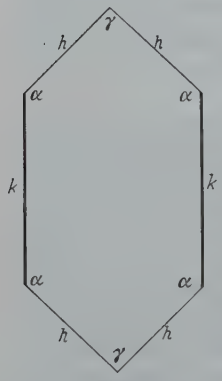

Fig. 2

Die Diametralsechsecke und die Seitenfünfecke sind total-geodätische Flächenstücke im Dodekaederraum. An das Bild einer Dodekaederkante im Dodekaederraum grenzen genau so viele Seitenfünfecke wie Diametralsechsecke. Aus Symmetriegründen sind diese so um die Kante angeordnet, daß je ein Seitenfünfeck und ein Diametralsechseck eben aneinanderstoßen, d.h. daß je ein Diametralsechseck und ein Seitenfünfeck ein einziges total-geodätisches Flächenstück bilden. Analog gibt es zu jeder Fünfeckshöhe ein Paar von Diametralsechsecken, die längs dieser Höhe eben aneinanderstoßen und zusammen ein total-geodätisches Flächenstück bilden. Damit ist eine natürliche Verheftung der Diametralsechsecke und der Seitenfünfecke erklärt. Da die Anzahl dieser Flächenstücke endlich ist, und da jede Randkante mit genau einer anderen Randkante verheftet wird, entsteht bei dieser Verheftung eine total-geodätische geschlossene Untermannigfaltigkeit im hyperbolischen (bzw. sphärischen) Dodekaederraum. Es ist nun zu zeigen, daß diese Untermannigfaltigkeit nicht in Komponenten zerfällt, d.h. daß keine echte Teilmenge der

21 Flächenstücke bei dieser Verheftung bereits eine geschlossene Fläche bildet.

Der Inhalt eines Seitenfünfeckes ist

$$F_5 = 3\pi - 5\beta \quad \text{(bzw. } F_5 = 5\beta - 3\pi\text{)},$$

wenn $\beta$ ein Fünfeckswinkel ist. Der Inhalt eines Diametralsechseckes ist

$$F_6 = 4\pi - 2\gamma - 4\alpha \quad \text{(bzw. } F_6 = 2\gamma + 4\alpha - 2\pi\text{)}.$$

Um das Bild einer Ecke des Ausgangsdodekaeders im Dodekaederraum schlage man eine Kugel vom Radius $\varepsilon$, wobei $\varepsilon$ eine hinreichend kleine Länge ist. Die Oberfläche dieser Kugel wird von den Seitenfünfecken in zwanzig (bzw. vier) kongruente kleine Dreiecke ikosaedrisch (tetraedrisch) zerlegt. Hieraus ist zu entnehmen, daß in dem Bild eines Eckpunktes in der oben konstruierten Fläche jeweils vier Sechsecke und zwei Fünfecke (bzw. zwei Sechsecke und ein Fünfeck) zusammenstoßen. Also ist

$$4\alpha + 2\beta = 2\pi \quad \text{(bzw. } 2\alpha + \beta = 2\pi\text{)}.$$

Damit hat die Vereinigung aller Diametralsechsecke und aller Seitenfünfecke den Inhalt

$$F = 15F_6 + 6F_5 = 78\pi - 60\alpha - 30\beta - 30\gamma = 36\pi$$

$$\text{(bzw. } F = 15F_6 + 6F_5 = 60\alpha + 30\beta + 30\gamma - 78\pi = 2\pi\text{)}.$$

Damit ist gezeigt, daß im sphärischen Dodekaederraum die Vereinigung aller genannten 21 Flächenstücke gerade den Mindestinhalt einer geschlossenen Fläche der konstanten Krümmung $+1$ hat. Das bedeutet aber, daß keine echte Teilmenge der genannten 21 Flächenstücke eine geschlossene Fläche bilden kann. Eine geschlossene Fläche mit dem Inhalt $2\pi$ und konstanter positiver Krümmung $+1$ hat das Geschlecht 1 und ist nicht-orientierbar. Damit ist die Behauptung der Einleitung im sphärischen Falle bewiesen.

Im hyperbolischen Falle ist die Verheftung der 21 Flächenstücke genauer zu untersuchen. Aus Fig. 1′ folgt, daß die Bilder der Kanten des Dodekaeders geschlossene geodätische Linien sind. Damit kann man die an ein Seitenfünfeck in den Ecken anstoßenden Seitenfünfecke bestimmen und findet, daß alle Seitenfünfecke in einer Komponente der konstruierten Untermannigfaltigkeit enthalten sind. Da aber keine Komponente nur aus Diametralsechsecken besteht, zerfällt die konstruierte Untermannigfaltigkeit nicht. Bestimmt man die beiden an ein festes Diametralsechseck angrenzenden Seitenfünfecke, so stellt man fest, daß die den Sechseckskanten gegenüberliegenden Ecken als Punkte der Untermannigfaltigkeit äquivalent sind und daß hier die Orientierbarkeitsbedingung verletzt ist.

Schließlich folgt aus der Relation

$$F = 2\pi(p - 2)$$

zwischen Flächeninhalt und Geschlecht einer nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche $p = 20$. Damit ist die in der Einleitung formulierte Behauptung auch im hyperbolischen Falle bewiesen.

## Literatur

[1] Herrmann, Oskar: Über die Verteilung der Längen von Loten in $n$-dimensionalen hyperbolischen Raumformen. (In Vorbereitung.)

[2] Löbell, Frank: Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig **83**, 167—174 (1931).

[3] — Zur Konstruktion geschlossener Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. S.-B. math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1955.

[4] Weber, Constantin, u. Seifert, Herbert: Die beiden Dodekaederräume. Math. Z. **37**, 237—253 (1933).

*Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität*

*(Eingegangen am 18. April 1961)*

Krull, W.
Math. Zeitschr. 77, 135—148 (1961)

# Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

Wolfgang Krull

Durch die Einführung des Begriffes des *Fastringes* hat es F. K. Schmidt[1]) möglich gemacht, Absolutbetragsbewertungen und Exponentenbewertungen mit reellen Werten in viel weitergehendem Maße gemeinsam zu behandeln, als man es auf den ersten Blick für durchführbar halten möchte. Die tiefergehenden topologischen Untersuchungen, zu denen er die Fastringe benutzte, erzwangen dabei die Beschränkung auf reellzahlige Werte. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Schmidtsche Begriffsbildung in passender Modifikation auch dann äußerst nützlich ist, wenn man allgemeinste Bewertungen systematisch vom Standpunkt der Ordnungsfunktionen aus betrachtet.

Unter einer *Ordnungsfunktion* des (kommutativen) Körpers $K$ verstehen wir einen Homomorphismus der multiplikativen Körpergruppe auf eine total geordnete (Abelsche) Gruppe. Teilt man die Ordnungsfunktionen in naheliegender Weise in Äquivalenzklassen ein, so entspricht jeder Äquivalenzklasse umkehrbar eindeutig eine totale Vorordnung der multiplikativen Gruppe von $K$ und somit eine *totale Unterhalbgruppe* $T$ von $K$ im Sinne der folgenden Definition: Die 0 enthaltende Untermenge $T$ von $K$ heißt totale Unterhalbgruppe, wenn 1. aus $a, b \in T$ stets $a \cdot b \in T$ und 2. aus $a^{-1} \notin T$ stets $a \in T$ folgt. — Wir nennen nun $a \in T$ Nichteinheit aus $T$, wenn $a^{-1} \notin T$, und bezeichnen die Untermenge $U$ von $K$ als *archimedisch beschränkt hinsichtlich* $T$, wenn für jede Nichteinheit $a$ aus $T$ ein $n$ existiert, derart daß $a^n \cdot U \subseteq T$. Indem wir uns an der Schmidtschen Konzeption des Fastrings orientieren, definieren wir schließlich:

Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ von $K$ mit der zugehörigen totalen Halbgruppe $T$ soll eine *Bewertung im weiteren Sinne* heißen, wenn die additive Komplexsumme $T + T$ *hinsichtlich* $T$ *archimedisch beschränkt ist.*

Den Wert dieser Definition zeigen die folgenden Resultate: 1. Bewertungen im weiteren Sinne sind: a) Die Exponentenbewertungen. b) Die Absolutbetragsbewertungen. c) „Zusammengesetzte" Bewertungen, die in naheliegender Weise aus der Kombination einer Exponentenbewertung mit einer Absolut-

[1]) Die Schmidtschen Konzeptionen liegen z. B. den Untersuchungen zugrunde, die in § 104 des 2. Bandes der van der Waerdenschen Algebra (Berlin 1959, 4. Auflage, S. 51—55) dargestellt sind. Bei van der Waerden werden gleich Schiefkörper betrachtet. Dagegen fehlt dort die auf den Begriff des Fastringes (van der Waerden, S. 52) gegründete, von F. K. Schmidt stammende Axiomatik des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes, die im übrigen auch in der vorliegenden Note nicht berührt wird, da gerade bei ihr die Beschränkung auf reellzahlige Bewertungen wesentlich ist.

betragsbewertung ihres Restklassenkörpers entstehen. — 2. Es ist äußerst nützlich, die Bewertungen des Typus c) von vornherein neben a) und b) einzuführen. Denn die Theorie total, aber nicht archimedisch geordneter Körper führt automatisch auf zusammengesetzte Bewertungen. — 3. Aus einer genaueren Analyse ergibt sich, daß es durchaus vernünftig erscheint, sich bei dem Studium der Ordnungsfunktionen von Körpern genau auf die Bewertungen im weiteren Sinne zu beschränken.

Zum Aufbau im einzelnen sei bemerkt: §1 bringt die nötigen Hilfssätze über total geordnete Abelsche Gruppen, unter kurzer Skizzierung der (an sich in der Literatur zu findenden) Beweise. In §2 wird der Zusammenhang mit der üblichen Bewertungstheorie hergestellt. §3 bringt den Beweis des Hauptsatzes über Bewertungen im weiteren Sinne. In §4 werden beliebige Ordnungsfunktionen eines Körpers diskutiert.

Ein großer Teil der Betrachtungen ließe sich leicht auf Schiefkörper ausdehnen, doch tauchen dort neue Fragen auf (z.B. Bewertungen mit nichtkommutativer Wertgruppe). Deshalb wurde hier durchweg die Beschränkung aufs Kommutative vorgezogen.

## § 1. Total vorgeordnete Abelsche Gruppen

In §1 werden multiplikative Abelsche Gruppen betrachtet; $e$ bedeutet stets das Einselement. Unter $M-N$ verstehen wir wie üblich die Differenzmenge von $M$ und $N \subseteq M$. Dagegen bedeutet später bei Untermengen $M, N$ eines *Körpers* $M+N$ stets die Komplexsumme, also $M+N=\{a+b \mid a \in M, b \in N\}$. — Im Anschluß an BOURBAKI verstehen wir unter einer *totalen Vorordnung* der Gruppe $G$ eine Relation $\geqq$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. Für jedes Paar $a, b$ aus $G$ gilt stets mindestens eine der beiden Relationen $a \geqq b$, $b \geqq a$. — 2. Aus $a \geqq b$, $b \geqq c$ folgt immer $a \geqq c$. — 3. Aus $a \geqq b$ folgt immer $a \cdot c \geqq b \cdot c$ für alle $c \in G$. — Eine totale Vorordnung wird als *Totalordnung* bezeichnet, wenn über 1. bis 3. hinaus noch gilt: 4. Aus $a \geqq b$, $b \geqq a$ folgt stets $a=b$.

Bei einer totalen Vorordnung schreiben wir $a>b$ nur dann, wenn $a \geqq b$, aber $b \ngeqq a$. Die durch „$e \geqq a$ für alle $a$" gekennzeichnete „*triviale Vorordnung*" schließen wir in §1 aus. — Unter einer *Unterhalbgruppe* $U$ von $G$ verstehen wir eine Untermenge mit den Eigenschaften: 1. Aus $a, b$ in $U$ folgt $a \cdot b$ in $U$. 2. $e \in U$. — Die *echte* Unterhalbgruppe $T$ von $G$ wird *total (in $G$)* genannt, wenn aus $c \notin T$ immer $c^{-1} \in T$ folgt. Es gilt dann, wie wohlbekannt:

HILFSSATZ 1. *Ist $\geqq$ eine totale Vorordnung von $G$, so ist $T=\{a \mid e \geqq a\}$* [2] *eine totale Unterhalbgruppe von $G$. — Ist umgekehrt $T$ eine totale Unterhalbgruppe von $G$, so gewinnt man eine totale Vorordnung von $G$ durch die Vorschrift: $b \geqq a$ genau dann, wenn $a \cdot b^{-1} \in T$.*

Totale Vorordnungen und totale Unterhalbgruppen entsprechen also einander umkehrbar eindeutig. — Die Menge $\{d \mid d \in T,\ d^{-1} \in T\}=E$ bildet die

[2] Natürlich könnte man statt $T$ auch $T'=\{a \mid a \geq e\}$ wählen. Die Bevorzugung von $T$ ist für unseren Aufbau der Bewertungstheorie zweckmäßig.

größte Untergruppe der totalen Unterhalbgruppe $T$. Genau dann, wenn $E=\{e\}$, definiert $T$ eine Totalordnung von $G$. Allgemein induziert die durch $T$ definierte totale Vorordnung von $G$ in kanonischer Weise eine Totalordnung der Faktorgruppe $G/E$. — Die Elemente von $E$ bzw. von $T-E$ bezeichnen wir als die *Einheiten* bzw. die *Nichteinheiten* von $T$. — Eine *echte* Untermenge $H$ der Halbgruppe $T$ wird *$T$-Semi-Ideal*[3]) genannt, wenn aus $a\in H$ stets $a\cdot c\subset H$ für alle $c\in T$ folgt. Hat das $T$-Semi-Ideal $P$ die Eigenschaft, daß immer $a\cdot b\notin P$, wenn $a\notin P$, $b\notin P$ $(a, b\in T)$, so nennt man $P$ ein *$T$-Semi-Primideal*.

Hilfssatz 2. *Die Menge aller Semi-Ideale der totalen Unterhalbgruppe $T$ ist hinsichtlich der Enthaltenseins-Relation $\supseteq$ total geordnet, ebenso natürlich die Untermenge aller Semi-Primideale. $M=T-E$ ist gleichzeitig das größte Semi-Ideal und das größte Semi-Primideal von $T$.*

Zum Beweis beachte man: Ist $H_1\supseteq H_2$, also etwa $h_2\notin H_1$, $h_2\in H_2$, so ist $h_1^{-1}\cdot h_2\notin T$ für alle $h_1\in H_1$, und daher $h_1\cdot h_2^{-1}\in T$ für alle $h_1\in H_1$; d.h. $H_2\supseteq H_1$.

Hilfssatz 3. *Ist $P$ ein Semi-Primideal der totalen Unterhalbgruppe $T$ und $p\in P$, $c\in T-P$, so ist stets $p\cdot c^{-1}\in P$.*

Beweis. Da $c\cdot p^{-1}\notin T$, ist $p\cdot c^{-1}\in T$, und aus $(p\cdot c^{-1})\cdot c\in P$, $c\notin P$ folgt $p\cdot c^{-1}\in P$.

Ist $T$ eine totale Unterhalbgruppe von $G$, so ist jede Oberhalbgruppe von $T$, d.h. jede $T$ umfassende Unterhalbgruppe von $G$, ebenfalls in $G$ total. Unter einer *totalen Unterhalbgruppe von $T$* verstehen wir eine *in* $G$ totale Unterhalbgruppe von $T$. Sind $T_1$, $T_2$ totale Unterhalbgruppen von $G$ und bedeutet $\geqq_i$ die durch $T_i$ definierte totale Vorordnung von $G$ $(i=1, 2)$, so bezeichnen wir genau dann $\geqq_1$ als *Verfeinerung* von $\geqq_2$ und $\geqq_2$ als *Vergröberung* von $\geqq_1$, wenn $T_2\supseteq T_1$. Vom Standpunkt der totalen Vorordnungen ist es also eine Fundamentalaufgabe, zu einer gegebenen totalen Unterhalbgruppe $T$ von $G$ die totalen Unter- und Oberhalbgruppen von $T$ zu bestimmen.

Hilfssatz 4. a) *Ist $P$ ein Semi-Primideal der totalen Unterhalbgruppe $T$ von $G$, so bildet die Menge $\{a\cdot b^{-1}\mid a\in T,\ b\in T-P\}=\{b\mid b^{-1}\in T-P\}\cup T$ eine totale Oberhalbgruppe $T_P$ von $T$. Die Menge aller $T_P$-Semi-Primideale ist gleich der Menge aller in $P$ enthaltenen $T$-Semi-Primideale; insbesondere ist $P$ das größte Semi-Primideal von $T_P$.* — b) *Ist $T_1$ eine Oberhalbgruppe von $T$, so ist das größte $T_1$-Semi-Primideal $M_1$ zugleich ein $T$-Semi-Primideal, und es gilt $T_1=T_{M_1}$.*

Beweis. a) Die Gleichheit der beiden Definitionen für $T_P$ und die Halbgruppeneigenschaft von $T_P$ ist leicht zu verifizieren. Ist $P_1$ ein $T_P$-Semi-Primideal, so ist jedenfalls $P_1\subseteq P\subset T$, und daraus folgt sofort, daß $P_1$ auch ein $T$-Semi-Primideal ist. Ist andererseits $P_1$ ein $T$-Semi-Primideal und $P_1\subseteq P$, so zeigt Hilfssatz 3, daß $P_1$ auch ein $T_P$-Semi-Primideal sein muß. — b) Da $T$ total ist, gilt $M_1\subseteq T$, und es ist $M_1$ sicher ein $T$-Semi-Primideal. Ist $a\in T_1-T$,

[3]) Von einem *Semi-Ideal* reden wir, da später zwischen „Idealen" und „Semi-Idealen" unterschieden werden muß, und da hier von den zwei für ein Ring-Ideal charakteristischen Eigenschaften sozusagen nur die *Hälfte* gefordert wird.

so ist $a^{-1} \in T - M_1$, also $a \in T_{M_1}$; umgekehrt folgt aus $a \in T - M_1$ sofort $a^{-1} \in T_1$. Es ist also $T_1 = T_{M_1}$.

HILFSSATZ 5. *Es sei $T$ eine totale Unterhalbgruppe von $G$ und $M$ ihr größtes Semi-Primideal. Dann gilt:* a) *Ist $T_0$ eine totale Unterhalbgruppe von $T$, so ist $M \subseteqq T_0$, und es ist $T_0 - M$ eine totale Unterhalbgruppe der Gruppe $E = T - M$.* — b) *Ist $T'$ eine totale Unterhalbgruppe von $E$, so ist $T' \cup M$ eine totale Unterhalbgruppe von $T$.*

Der Beweis von Hilfssatz 5 ist im wesentlichen trivial. Während Hilfssatz 4 die Menge aller Oberhalbgruppen einer totalen Halbgruppe $T$ charakterisiert, liefert Hilfssatz 5 eine Methode zur Konstruktion aller totalen Unterhalbgruppen der totalen Halbgruppe $T$.

Die Gruppe $G$ soll wie üblich hinsichtlich der totalen Vorordnung $\geqq$ *archimedisch* heißen, wenn für alle $a, b \in G$ mit $e > a$, $e \geqq b$ eine natürliche Zahl $n$ existiert, derart daß $b \geqq a^n$. Offenbar gilt: Ist $E$ die Einheitengruppe der zu $\geqq$ gehörigen totalen Unterhalbgruppe $T$ von $G$, so ist $G$ hinsichtlich $\geqq$ genau dann archimedisch, wenn $G/E$ hinsichtlich der durch $\geqq$ induzierten totalen Ordnung archimedisch ist.

HILFSSATZ 6. *$G$ ist hinsichtlich der totalen Vorordnung $\geqq$ genau dann archimedisch, wenn die zugehörige totale Unterhalbgruppe $T$ ein einziges Semi-Primideal (nämlich $M$) besitzt.*

Beweis. a) Ist $G$ hinsichtlich $\geqq$ archimedisch und $a < e$, also $a \in M$, und bedeutet $p$ ein Element aus irgendeinem Semi-Primideal $P$ von $T$, so gilt $a^n \cdot p^{-1} \in T$, $a^n \in P$ für großes $n$, also auch $a \in P$; d.h. es ist $P \supseteqq M$, $P = M$. — Ist $G$ hinsichtlich $\geqq$ nicht archimedisch, so gibt es ein $a \in M$ und ein $b \in T$, derart daß $a^n \cdot b^{-1} \notin T$ für alle $n$. Dann aber ist $\{b \mid b \in T;\ a^n \cdot b^{-1} \in T \text{ für alle } n\} = P$ ein in $M$ echt enthaltenes Semi-Primideal von $T$.

Wir definieren schließlich noch: Ist $T$ die zu der totalen Vorordnung $\geqq$ gehörige totale Unterhalbgruppe von $G$ und $E$ die Einheitengruppe von $T$, so soll eine Untermenge $U$ von $G$ hinsichtlich $\geqq$ (und hinsichtlich der durch $\geqq$ induzierten Totalordnung von $G/E$) *beschränkt* bzw. *archimedisch beschränkt* heißen, wenn ein $a \in T$ existiert, derart daß $a \cdot u \in T$ für alle $u \in U$, bzw. wenn es zu jedem $a \in M = T - E$ ein $n$ gibt, derart daß $a^n \cdot u \in T$ für alle $u \in U$. — Offenbar bedeutet „archimedisch beschränkt" genau so viel wie „beschränkt", wenn $G$ hinsichtlich $\geqq$ archimedisch ist. Im allgemeinen dagegen ist „archimedisch beschränkt" eine schärfere Bedingung als „beschränkt".

## § 2. Ordnungsfunktionen und Bewertungen von Körpern

*Vorbemerkung.* Im folgenden denken wir uns jede auftretende multiplikative Gruppe $G$ stillschweigend durch Hinzunahme eines Nullelements 0 erweitert, das den Gleichungen $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in G$ genügt. (Ist $G$ multiplikative Untergruppe eines Körpers $K$, so ist 0 natürlich die Körpernull.) Ist $G^*$ die unerweiterte, $G = G^* \cup \{0\}$ die erweiterte Gruppe, so soll unter einer totalen Unterhalbgruppe von $G$ immer eine Unterhalbgruppe $T = T^* \cup \{0\}$

verstanden werden, bei der $T^*$ totale Unterhalbgruppe von $G^*$ im Sinne von §1 ist. Offenbar gilt: Die totalen Unterhalbgruppen von $G$ und $G^*$ entsprechen einander umkehrbar eindeutig. In jeder totalen Unterhalbgruppe $T = T^* \cup \{0\}$ von $G$ ist $\{0\}$ Semi-Primideal. Die übrigen Semi-Ideale bzw. Semi-Primideale von $T$ entstehen aus denen von $T^*$ einfach durch Adjunktion von 0. — Die durch $T$ definierte totale Vorordnung von $G$ entsteht aus der durch $T^*$ definierten totalen Vorordnung von $G^*$ durch Hinzunahme der Vorschrift: $a > 0$ für alle $a \in G$. Alle Hilfssätze von §1 lassen sich sofort auf erweiterte Gruppen übertragen. Nur ist jetzt zu den Oberhalbgruppen von $T$ die Gesamtgruppe $G$ hinzuzurechnen, $G = T_{\{0\}}$ im Sinne von Hilfssatz 4, und es ist dementsprechend die durch $a \leqq e$ für alle $a \neq 0$, $0 < e$ gekennzeichnete triviale Vorordnung von $G$ zuzulassen. Ein Homomorphismus einer erweiterten Gruppe $G$ auf eine erweiterte Gruppe $H$ ist ein Homomorphismus von $G^*$ auf $H^*$, ergänzt durch die Vorschrift: $G$-Null auf $H$-Null.

Es sei jetzt $K$ ein kommutativer Körper mit Einselement $e$. Unter einer *Ordnungsfunktion* $\mathfrak{v}$ von $K$ verstehen wir einen Homomorphismus der erweiterten multiplikativen Gruppe $K = K^* \cup \{0\}$ in eine total geordnete Gruppe $O$. Jeder Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ entspricht eindeutig eine totale Unterhalbgruppe $T$ von $K$, nämlich $T = \{a \mid \mathfrak{v}a \leqq \mathfrak{v}e\}$. Umgekehrt entspricht der totalen Unterhalbgruppe $T$ von $K$ mit der Einheitenuntergruppe $E^*$ eindeutig eine *kanonische Ordnungsfunktion* $\mathfrak{v}^*$, nämlich der kanonische Homomorphismus von $K$ auf die durch Auszeichnung von $T$ im Sinne von §1 total geordnete Faktorgruppe $K/E^*$. Nennen wir ferner zwei Ordnungsfunktionen von $K$, denen dieselbe totale Unterhalbgruppe $T$ zugeordnet ist, äquivalent, so wird dadurch die Klasse aller Ordnungsfunktionen in elementefremde Äquivalenzklassen aufgeteilt[4]), und man hat den Satz:

*Die Klassen äquivalenter Ordnungsfunktionen von $K$ entsprechen umkehrbar eindeutig den totalen Unterhalbgruppen $T$ von $K$ und somit den totalen Vorordnungen von $K$.* In jeder Äquivalenzklasse gibt es genau eine kanonische Ordnungsfunktion.

Unter den Ordnungsfunktionen zeichnen wir jetzt drei Klassen aus, die als *Exponentenbewertungen*, *Absolutbetragsbewertungen* und *zusammengesetzte Bewertungen* bezeichnet werden sollen. Die Exponentenbewertungen sind diejenigen Bewertungen, die im Sinne der allgemeinen Bewertungstheorie durch die Existenz eines *Bewertungsringes* in $K$ charakterisiert sind. Bedenken wir, daß wir bei den Ordnungsfunktionen die geordneten Bildgruppen durchweg multiplikativ schreiben und daß bei uns die einer Gruppenordnung entsprechende totale Unterhalbgruppe aus allen $a \leqq e$ (und nicht allen $a \geqq e$) besteht, so sehen wir, daß wir definieren müssen: Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ heißt eine *Exponentenbewertung*, wenn außer der Homomorphiebedingung

[4]) Unsere Äquivalenzdefinition ist natürlich gleichwertig mit der folgenden: Die Ordnungsfunktionen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$, die $K$ *auf* die total geordneten Gruppen $\mathfrak{v}K = O$, $\mathfrak{v}'K = O'$ abbilden, heißen äquivalent, wenn ein Ordnungsisomorphismus $\mathfrak{i}$ von $O$ auf $O'$ existiert derart, daß $\mathfrak{v}' = \mathfrak{i} \circ \mathfrak{v}$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{i}^{-1} \circ \mathfrak{v}'$.

$\mathfrak{v}(a \cdot b) = (\mathfrak{v}\, a) \cdot (\mathfrak{v}\, b)$ zusätzlich die Bedingung

$$\mathfrak{v}(a+b) \leqq \max\{\mathfrak{v}a, \mathfrak{v}b\} \qquad \text{für alle } a, b \in K$$

erfüllt ist. — Wir erhalten dann mühelos:

SATZ 1. *Die Ordnungsfunktion* $\mathfrak{v}$ *mit der zugehörigen totalen Unterhalbgruppe* $T$ *ist dann und nur dann eine Exponentenbewertung, wenn* $T$ *als Untermenge von* $K$ *der additiven Bedingung* $T+T=T$ *im Sinne von* §1 *genügt, wenn also* $T$ *eine additive Gruppe und damit ein (Bewertungs-)Ring ist*[5]).

Es sei ferner $\boldsymbol{R}$ die (durch 0 erweiterte) in natürlicher Weise geordnete Multiplikationsgruppe der nichtnegativen reellen Zahlen. Dann definieren wir: Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$, die $K$ *auf* die total geordnete Gruppe $O$ abbildet, soll eine Absolutbetragsbewertung heißen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Es existiert eine ordnungserhaltende isomorphe Abbildung (Injektion) $\mathfrak{j}$ von $O$ in $\boldsymbol{R}$, derart daß der durch Zusammensetzung von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{v}$ entstehende Homomorphismus $\mathfrak{a} = \mathfrak{j} \circ \mathfrak{v}$ von $K$ in $\boldsymbol{R}$ zusätzlich den Bedingungen $(A_1)$ und $(A_2)$ genügt, die die Möglichkeit der Addition in $\boldsymbol{R}$ ausnützen:

$(A_1)$ $\quad \mathfrak{a}\, a_1 + \mathfrak{a}\, a_2 \geqq \mathfrak{a}(a_1 + a_2)$ $\quad$ für alle Paare $a_1, a_2 \in K$;

$(A_2)$ $\quad \mathfrak{a}(a_1^* + a_2^*) > \max\{\mathfrak{a}\, a_1^*, \mathfrak{a}\, a_2^*\}$ $\quad$ für mindestens ein Paar $a_1^*, a_2^* \in K$.

Die Benennung *Absolutbetragsbewertung* wird gerechtfertigt durch den keineswegs trivialen, aber wohlbekannten *Satz von* OSTROWSKI:

SATZ 2. *Ist* $\mathfrak{v}$ *eine Absolutbetragsbewertung von* $K$, *so gibt es eine Injektion* $\mathfrak{k}$ *von* $K$ *in den Körper* $\boldsymbol{C}$ *aller komplexen Zahlen und eine ausgezeichnete ordnungserhaltende Injektion* $\mathfrak{j}^*$ *von* $O = \mathfrak{v}K$ *in* $\boldsymbol{R}$, *derart daß für* $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{j}^* \circ \mathfrak{v}$ *allgemein gilt:*

$(A^*)$ $\qquad \mathfrak{a}^*\, a = |\mathfrak{k}\, a|$,

*wobei* $|\mathfrak{k}\, a|$ *den Absolutbetrag der komplexen Zahl* $\mathfrak{k}a$ *bedeutet.*

(Kurz und unpräzis, aber anschaulich: Man kann $K$ so mit einem Körper aus komplexen Zahlen identifizieren und die „Bewertung" $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{j}^* \circ \mathfrak{v}$ so normieren, daß der Wert eines Körperelements gerade gleich seinem Absolutbetrag wird.) — Für unsere weiteren Untersuchungen ist weniger der Satz von OSTROWSKI wichtig, als das folgende Theorem, das wenn auch nicht in der hier gewählten Formulierung, so doch in seinem Inhalt auf F. K. SCHMIDT zurückgeht, und das daher als *Satz von* F. K. SCHMIDT bezeichnet werden soll.

SATZ 3. *Die Ordnungsfunktion* $\mathfrak{v}$ *mit der zugehörigen totalen Unterhalbgruppe* $T$ *ist genau dann eine Absolutbetragsbewertung, wenn* $K$ *hinsichtlich*

[5]) Man beachte, daß $T+T=T$ die additive Gruppeneigenschaft von $T$ sichert, weil $T$ jede Einheitswurzel aus $K$, speziell also auch $-e$, enthält. — Die Bezeichnung „Exponentenbewertung" für die Bewertungen mit Bewertungsring, die ich zuerst in meiner „Allgemeinen Bewertungstheorie" [J. reine u. angew. Math. **176**, 160—196 (1931)] systematisch untersucht habe, wurde deshalb gewählt, weil die Einführung dieser Bewertungen letzten Endes auf das Studium der Potenzreihenringe einer Unbestimmten zurückgeht, wo die Anfangsexponenten der Reihen in natürlicher Weise als „Werte" auftreten. (Im Sinne der vorliegenden Note wären bei einem Potenzreihenring nicht die Anfangsexponenten $n$, sondern etwa die Zahlen $exp(-n)$ als Werte zu wählen.)

*der durch $T$ bestimmten Vorordnung im Sinne von §1 archimedisch ist, und wenn außerdem $T + T$ echte Obermenge von $T$, aber im Sinne von §1 beschränkt ist.* (In unserem Fall ist dann $T + T$ von selbst archimedisch beschränkt.)

Zum Beweis, wie er im Rahmen unseres Ansatzes am raschesten zu führen wäre, sollen hier nur einige Andeutungen gegeben werden. Da die Gruppe $\boldsymbol{R}$ hinsichtlich ihrer natürlichen Ordnung archimedisch ist, muß auch $K$ hinsichtlich $\mathfrak{v}$ archimedisch sein. Ebenso ergibt sich die Notwendigkeit der Bedingungen für $T+T$. (Die zur natürlichen Ordnung von $\boldsymbol{R}$ gehörige totale Halbgruppe $T_{\boldsymbol{R}} = \{r \mid |r| \leqq 1\}$ ist keine additive Gruppe, wohl aber ist $T_{\boldsymbol{R}} + T_{\boldsymbol{R}}$ beschränkt.) Ist andererseits $K$ hinsichtlich der durch $\mathfrak{v}$ bestimmten totalen Vorordnung, also auch $O = \mathfrak{v}K$ hinsichtlich der induzierten Totalordnung archimedisch, so existiert jedenfalls, wie wohlbekannt, eine Injektion $\mathfrak{j}$ von $O$ in $\boldsymbol{R}$. Da ferner $T$ keine additive Gruppe ist, gibt es Elemente $a_1^* \in T$, $a_2^* \in T$, derart daß $a_1^* + a_2^* \notin T$, und da $T$ durch $\mathfrak{a} = \mathfrak{j} \circ \mathfrak{v}$ in $T_{\boldsymbol{R}}$ abgebildet wird, bedeutet das: $\mathfrak{a} a_i^* \leqq 1$ $(i = 1, 2)$, $\mathfrak{a}(a_1^* - a_2^*) > 1$; es ist also jedenfalls $(A_2)$ bei jeder Injektion $\mathfrak{j}$ von $O$ in $\boldsymbol{R}$ erfüllt. Somit bleibt nur zu zeigen: Aus „$T + T$ beschränkt" und der Existenz von $a_1^*$, $a_2^*$ läßt sich die Existenz einer Injektion $\mathfrak{j}^*$ erschließen, derart daß $(A_1)$ für $\mathfrak{a} = \mathfrak{j}^* \circ \mathfrak{v}$ gilt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß $\mathfrak{j}^*$ die Gestalt $\mathfrak{j}^* = \mathfrak{r} \circ \mathfrak{j}$ hat, wobei $\mathfrak{r}$ ein ordnungserhaltender Automorphismus von $\boldsymbol{R}$, also eine Abbildung der Form $\mathfrak{r} r = r^s$ mit festem, reell positivem $s$ ist. Dieser noch fehlende Beweis ist das eigentliche Kernstück; er kann elementar, ohne Hereinziehung topologischer Überlegungen geführt werden, ist aber ziemlich lang und etwas künstlich. Hier sei also auf die Literatur verwiesen[6]).

Zu einem allgemeineren Bewertungstyp führt das Prinzip der Verfeinerung einer Vorordnung im Sinne von §1. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, von dem — wie später zu sehen, allein wichtigen — Sonderfall auszugehen, daß die zunächst gegebene Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ von $K$ eine *Exponentenbewertung* ist, daß also zu $\mathfrak{v}$ nicht eine beliebige totale Unterhalbgruppe, sondern ein Bewertungsring $T$ aus $K$ gehört. Hier können wir bei der Verfeinerung von $\mathfrak{v}$ statt von der Einheitengruppe $E^*$ von $T$ vom Restklassenkörper $\overline{K} = T/M$ von $T$ nach dem maximalen Primideal $M = T - E^*$ ausgehen. Ist $\overline{T}$ eine totale Unterhalbgruppe von $\overline{K}$, so ist $\widetilde{T}^* = \{a \mid a \in T, a + M \in \overline{T}^*\}$ eine totale Unterhalbgruppe von $E^*$, und wir haben für die im Sinne von §1, Hilfssatz 5 gebildete totale Unterhalbgruppe $T_1 = M \cup \widetilde{T}^*$ von $T$ die zweite Darstellung $T_1 = \{a \mid a + M \in \overline{T}\}$. Ist also $\mathfrak{v}_1$ eine zu $T_1$ gehörige Ordnungsfunktion von $K$, so kann man nicht nur rein gruppentheoretisch $\mathfrak{v}_1$ im Sinne von §1 als Verfeinerung von $\mathfrak{v}$ auffassen. Man kann auch körpertheoretisch sagen: $\mathfrak{v}_1$ entsteht durch „Zusammensetzung" einer Exponentenbewertung $\mathfrak{v}$ von $K$ und einer Ordnungsfunktion $\overline{\mathfrak{v}}$ des zu $\mathfrak{v}$ gehörigen Restklassenkörpers $\overline{K}$. In erster Linie interessiert nun wieder der Fall, daß auch die Ordnungsfunktion $\overline{\mathfrak{v}}$ von $\overline{K}$ eine Bewertung von einem der bereits bekannten Typen darstellt. Ist $\overline{\mathfrak{v}}$ ebenso wie $\mathfrak{v}$ eine Exponentenbewertung, also $\overline{T} + \overline{T} = \overline{T}$, so haben wir auch $T_1 + T_1 = T_1$,

[6]) Der Beweis kann z. B. aus §104 von VAN DER WAERDEN [vgl. [1])] herauspräpariert werden. Vgl. ferner: KAPLANSKY, I.: Topological methods in valuation theory. Duke math. J. **14**, 527—541 (1947), insbesondere Lemma 1 (ARTIN).

d.h. durch die Zusammensetzung zweier Exponentenbewertungen $\mathfrak{v}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ entsteht wieder eine Exponentenbewertung. Auf einen neuen, bisher noch nicht erfaßten „Bewertungs"-Typ kommen wir dagegen, wenn wir für $\bar{\mathfrak{v}}$ eine Absolutbetragsbewertung von $\bar{K}$ wählen. Daß dieser neue Typ, bei dem wir von einer „echt zusammengesetzten Bewertung" reden wollen, unsere Aufmerksamkeit verdient, zeigen die folgenden Beispiele:

a) Ist $K$ ein nichtarchimedisch total geordneter Körper, und setzen wir $|a| = a$ bzw. $= -a$ falls $a \geqq 0$ bzw. $< 0$, so bildet $T = \{a \mid n \cdot e > |a| \text{ für großes } n\}$ einen Bewertungsring in $K$ mit dem maximalen Primideal $M = \{a \mid n \cdot |a| < e \text{ für alle } n\}$, dem die zur Ordnung von $K$ gehörige „Größenklassenbewertung" $\mathfrak{v}$ entspricht. Im Restklassenkörper $\bar{K} = T/M$ ist die Gruppe $\bar{T} = \{a + M \mid |a| \leqq e\}$ ausgezeichnet, die eine Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ von $\bar{K}$ definiert. Im ganzen legt also die gegebene Ordnung von $K$ eine Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}_1$ fest, die aus einer Exponentenbewertung $\mathfrak{v}$ und einer Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ des Restklassenkörpers von $\mathfrak{v}$ zusammengesetzt ist[7]).

b) Ist $L$ ein algebraischer Oberkörper des in a) betrachteten Körpers $K$, so braucht $L$ keineswegs total ordenbar zu sein. Wohl aber gibt es zu der Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ von a) immer (mindestens) eine Fortsetzung $\mathfrak{w}$ auf $L$, die ebenso wie $\mathfrak{v}$ Exponentenbewertung ist. Der Restklassenkörper $\bar{L}$ von $\mathfrak{w}$ ist ein algebraischer Oberkörper von $\bar{K}$, und die Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ von a) läßt sich in mindestens einer Weise zu einer Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{w}}$ von $\bar{L}$ erweitern. Die Zusammensetzung von $\mathfrak{w}$ und $\bar{\mathfrak{w}}$ liefert eine Ordnungsfunktion $\mathfrak{w}_1$ von $L$, die sich als Fortsetzung von $\mathfrak{v}_1$ auf $L$ deuten läßt, und die offenbar für die Strukturuntersuchung von $L$ über $K$ wichtig ist.

Die Beispiele von a) und b) zeigen, daß es sinnvoll ist, den Bewertungsbegriff über die wohlbekannten Spezialfälle der Exponenten- und der Absolutbetragsbewertungen hinaus folgendermaßen zu verallgemeinern:

DEFINITION. Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}_1$ von $K$ soll eine *Bewertung im weiteren Sinne* heißen, wenn $\mathfrak{v}_1$ die Verfeinerung einer Exponentenbewertung $\mathfrak{v}$ ist, die dadurch entsteht, daß man $\mathfrak{v}$ mit einer Bewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ im engeren Sinne (Exponenten- oder Absolutbetragsbewertung des zu $\mathfrak{v}$ gehörigen Restklassenkörpers $\bar{K}$) zusammensetzt.

Unsere Definition ist so gefaßt, daß auch alle Bewertungen im engeren Sinne Bewertungen im weiteren Sinne werden, wenn man nur, wie es hier zweckmäßig ist, auch die triviale Exponentenbewertung $\mathfrak{v}_0$ zuläßt, bei der $T = K$, $M = \{0\}$, $\bar{K} = K/\{0\} = K$ ist. (Zum Beispiel erhält man eine evtl. vorhandene Absolutbetragsbewertung $\mathfrak{v}_1$ von $K$ durch Zusammensetzung von $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_1 = \bar{\mathfrak{v}}$.) Man wird nun sofort fragen, ob die zunächst auf verhältnismäßig künstliche Weise konstruierten Bewertungen im weiteren Sinne in ähnlich einfacher Weise charakterisiert werden können, wie die Exponenten- und Absolutbetragsbewertungen in Satz 1 bzw. Satz 3 charakterisiert wurden. Die Antwort lautet:

[7]) In der „Allgemeinen Bewertungstheorie" [vgl. [5])] wird die Theorie der total geordneten Körper noch *neben*, aber *nicht im Rahmen* der eigentlichen Bewertungstheorie entwickelt.

Satz 4. *Die Ordnungsfunktion $v$ von $K$ mit der zugehörigen totalen Halbgruppe $T$ ist dann und nur dann eine Bewertung im weiteren Sinne, wenn $T+T$ im Sinne von §1 archimedisch beschränkt ist.*

Satz 4 soll in §3 bewiesen werden. Anschließend wollen wir in §4 zeigen, daß es vom Standpunkt der totalen Vorordnungen aus kaum zweckmäßig sein dürfte, den Bewertungsbegriff über die Bewertungen im weiteren Sinne hinaus auszudehnen. Dabei gehen wir so vor, daß wir zunächst systematisch beliebige totale Halbgruppen $T$ aus einem gegebenen Körper $K$ untersuchen.

### § 3. Totale Unterhalbgruppen in Körpern. Beweis von Satz 4

Es sei $T$ eine totale Halbgruppe aus dem Körper $K$ mit der Einheitengruppe $E^*$ und dem maximalen Semi-Primideal $M=T-E^*$. Wir setzen $S=\{a \mid a\cdot(T+T)\subseteq T\}$. $S$ ist entweder ein Semi-Ideal von $T$ oder gleich $T$ selbst. Natürlich kann $S=\{0\}$ sein. Ein Semi-Ideal $H^+$ (bzw. Semi-Primideal $P^+$) von $T$ soll *Ideal* (bzw. *Primideal*) heißen, wenn $H^+$ (bzw. $P^+$) eine *additive Gruppe* darstellt. Aus Hilfssatz 2 von §1 folgt sofort: Es gibt in $T$ ein *größtes Primideal* $M^+$ und ein *größtes Ideal* $N^+$. Natürlich ist $T\supset N^+\supseteq M^+$.

Hilfssatz 7. *Es ist $S\supseteq N^+$. Jedes Semi-Primideal $P\subset S$ ist ein Primideal.*

Beweis. a) Ist $c\in N^+$, so haben wir $c\cdot a_i\in N^+$ $(i=1,2)$ für jedes Paar $a_1, a_2\in T$, und aus der Definition von $N^+$ folgt $c\cdot a_1-c\cdot a_2=c\cdot(a_1-a_2)\in N^+\subset T$. Also ist $c\in S$. — b) Es seien $a_1, a_2\in P$ und etwa $a_2\cdot a_1^{-1}\in T$, also $a_2=a_1\cdot c$, $c\in T$. Ferner sei $P\subset S$ und $s\subseteq S-P$. Dann hat man $a_1+a_2=a_1\cdot(e+c)\in T$ wegen $a_1\in S$, weiter $s\cdot(a_1+a_2)=a_1\cdot s\cdot(e+c)\in P$ wegen $s\cdot(e+c)\in T$, $a_1\in P$ und schließlich $a_1+a_2\in P$ wegen $s\cdot(a_1+a_2)\in P$, $s\notin P$.

Korollar. *Das Primideal $M^+$ ist entweder gleich $S$, oder es ist das größte in $S$ echt enthaltene Semi-Primideal.*

Es sei jetzt $\tilde{T}=T_{M^+}$ die zu $M^+$ gehörige Oberhalbgruppe von $T$ im Sinne von Hilfssatz 4 von §1 (hier natürlich einschließlich 0). Dann gilt:

Hilfssatz 8. *Es ist $\tilde{T}+\tilde{T}=\tilde{T}$, d.h. $\tilde{T}$ ist ein Bewertungsring.*

Beweis. Sind $\tilde{a}_i\in\tilde{T}$ $(i=1,2)$, so haben wir $\tilde{a}_i=a_i\cdot c^{-1}$ $(i=1,2;\ a_i\in T$, $c\in T-M^+)$. Wegen $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=(a_1+a_2)\cdot c^{-1}$, $c^{-1}\in\tilde{T}$ ist $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2\in\tilde{T}$, falls $a_1+a_2\in\tilde{T}$. Ist nun $a_1+a_2\notin T\subseteq\tilde{T}$, so ist $a_1+a_2=d^{-1}$, $d\in T$. Wäre $d\in M^+$, so hätten wir $d\cdot a_i\in M^+$ $(i=1,2)$, $d\cdot a_1+d\cdot a_2=e\in M^+$, was unmöglich ist. Es ist also $d^{-1}=a_1+a_2\in T_{M^+}=\tilde{T}$ w.z.b.w.

Korollar. *$T$ ist genau dann Bewertungsring, $T+T=T$, wenn $M^+=M$, also $T=T_{M^+}$, $S=T$.*

Ist $T\supset S$, so bezeichnen wir mit $\sqrt{S}$ das kleinste Semi-Primoberideal von $S$ (vgl. Hilfssatz 2). Wie sofort zu verifizieren, ist $\sqrt{S}=\{a \mid a^n\in S$ für großes $n\}$[8]).

[8]) $\sqrt{S}$ weist darauf hin, daß es sich im Sinne der Idealtheorie um das *Radikal* handelt, für das sich die Bezeichnung $\sqrt{\ldots}$ einzubürgern beginnt (vgl. etwa Zariski-Samuel, Commutative Algebra, Bd. 1, S. 174. Princeton 1958). Zur direkten Verifikation der Tatsache, daß $\{a \mid a^n\in S$ für großes $n\}$ ein Primideal ist, beachte man: Ist $(a_1\cdot a_2)^n\in S$ und etwa $a_2\cdot a_1^{-1}\in T$, so ist $a_2^{2n}\in S$.

Für $S = M^+$ ist $\sqrt{S} = M^+$. Für $S > M^+$ gibt es kein Semi-Primideal $P$ mit $\sqrt{S} > P > M^+$. Denn aus $\sqrt{S} > P \geqq M^+$ folgt $S > P$ nach Hilfssatz 2 und weiter $P = M^+$ nach dem Korollar zu Hilfssatz 7.

HILFSSATZ 9. *Ist $T + T > T$, so ist $T + T$ dann und nur dann archimedisch beschränkt, wenn $M = \sqrt{S} > M^+$. In diesem Fall ist $M^+$ das zweitgrößte Semi-Primideal von $T$.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus den schon besprochenen Eigenschaften von $\sqrt{S}$, aus dem Korollar zu Hilfssatz 8 und aus der Definition der archimedischen Beschränktheit. Man beachte: „$a^n \in S$ für großes $n$" ist gleichwertig mit „$a^n \cdot (T + T) \subseteq T$ für großes $n$". — Zum Beweis von Satz 4 von §2 brauchen wir jetzt noch eine Aussage über $T + M^+$.

HILFSSATZ 10. a) *$T + M^+$ ist eine Oberhalbgruppe von $T$ mit dem größten Primideal $M^+$.* — b) *Ist $T + T$ archimedisch beschränkt, so ist stets $T + M^+ = T$.*[9])

Beweis. a) Ist $a_i = c_i + p_i$ ($c_i \in T$, $p_i \in M^+$; $i = 1, 2$), so ist $a_1 \cdot a_2 = c_1 \cdot c_2 + p \in T + M^+$ wegen $p = c_1 \cdot p_2 + c_2 \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2 \in M^+ = M^+ + M^+$. $T + M^+$ ist also Halbgruppe, und nach Hilfssatz 4 von §1 gibt es in $T$ ein Semi-Primideal $P$, derart daß $T + M^+ = T_P$ im dortigen Sinne. $P$ ist das maximale Semi-Primideal von $T_P$, und da $p^{-1} = a - q$ ($a \in T$; $p, q \in M^+$) zu dem Widerspruch $e = a \cdot p + q \cdot p \in M^+$ führen würde, ist $P \geqq M^+$. Daraus folgt weiter nach Hilfssatz 4, daß $M^+$ das maximale Primideal von $T + M^+ = T_P$ ist. — b) Ist $T + T$ archimedisch beschränkt, so ist entweder $T + T = T + M^+ = T$, oder es ist nach Hilfssatz 9 sicher $M = \sqrt{S}$ und $M^+$ das zweitgrößte Semi-Primideal von $T$. In diesem letzten Falle haben wir also für das Semi-Primideal $P$ von a) nur die beiden Möglichkeiten $P = M$, $T + M^+ = T_M = T$ und $P = M^+$, $T + M^+ = T_{M^+}$. Es sei nun $s \in S - M^+$. Dann ist $s^{-2} \in T_{M^+}$. Wäre aber $s^{-2} = a + p$ ($a \in T$, $p \in M^+$), so hätten wir $s^{-1} = a \cdot s + p \cdot s \in T$, was unmöglich ist wegen $T + T > T$, $T > S$. Wir haben also $s^{-2} \notin T + M^+$, $T + M^+ < T_{M^+}$, $T + M^+ = T$.

*Beweis von Satz 4 von §2.* a) Ist $T + T > T$, also $T$ kein Bewertungsring, aber $T + T$ archimedisch beschränkt, so ist $\sqrt{S} = M$ das größte, $M^+$ das zweitgrößte Semi-Primideal von $T$, und $T + M^+ = T$. Wir bilden nun zu dem Bewertungsring $\bar{T} = T_{M^+}$ den Restklassenkörper $\bar{K} = \bar{T}/M^+$, in dem durch $T$ die totale Halbgruppe $(T + M^+)/M^+ = T/M^+ = \bar{T}$ ausgezeichnet ist. Ist $\bar{\mathfrak{v}}$ die zu $\bar{T}$ gehörige kanonische Ordnungsfunktion von $\bar{K}$, so ist $\bar{K}$ hinsichtlich $\bar{\mathfrak{v}}$ nach Hilfssatz 6 von §1 archimedisch, weil $\bar{M} = \sqrt{S}/M^+$ das einzige von $\{\bar{0}\}$ verschiedene Semi-Primideal von $\bar{T}$ darstellt. Es ist $\bar{T} + \bar{T} > \bar{T}$, weil aus $\bar{T} + \bar{T} = \bar{T}$ sofort $T + T = T$ folgte. Ist schließlich $\bar{a} = a + M^+ \in \bar{M} = \sqrt{S}$, so ist $a^n \in S$ für großes $n$, also $a^n \cdot (T + T) \subseteq T$ und infolgedessen auch $\bar{a}^n \cdot (\bar{T} + \bar{T}) \subseteq \bar{T}$. Es ist also $\bar{T}$ auch archimedisch beschränkt, und aus Satz 3 von §2 folgt, daß $\bar{\mathfrak{v}}$ eine Absolutbetragsbewertung von $\bar{K}$ ist. Die durch $T$ selbst definierte kanonische Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ ist also eine Bewertung im weiteren Sinne,

[9]) Auf die von mir zunächst übersehene Notwendigkeit des Beweises dieses Hilfssatzes machte mich Herr P. UCSNAY aufmerksam.

zusammengesetzt aus der durch $\tilde{T} = T_{M^+}$ definierten kanonischen Exponentenbewertung $\tilde{\mathfrak{v}}$ von $K$ und der Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ von $\bar{K}$. — b) Es sei $\mathfrak{v}$ eine Bewertung im weiteren Sinne von $K$ mit der zugehörigen totalen Halbgruppe $T$, die aus einer Exponentenbewertung $\tilde{\mathfrak{v}}$ von $K$ mit der zugehörigen totalen Halbgruppe $\tilde{T}$ und aus einer Absolutbetragsbewertung $\bar{\mathfrak{v}}$ des durch $\tilde{\mathfrak{v}}$ bestimmten Restklassenkörpers $\bar{K}$ mit der zugehörigen totalen Halbgruppe $\bar{T}$ im Sinne von §2 zusammengesetzt ist. Dann wissen wir: Es gibt in $T$ ein Primideal $\tilde{M}$, das gleichzeitig das größte Semi-Primideal von $\tilde{T}$ ist, und für das $\tilde{T} = T_{\tilde{M}}$ im Sinne von §1 gilt. $\bar{T}$ ist eine ausgezeichnete Halbgruppe von $\bar{K} = \tilde{T}/\tilde{M}$, und wir haben $T = \{a \mid a + \tilde{M} \subseteq \bar{T}\}$, so daß wegen $\tilde{M} + \tilde{M} = \tilde{M}$ sicher $T + \tilde{M} = T$ gilt. Ist $\bar{M}$ bzw. $M$ das größte Semi-Primideal von $\bar{T}$ bzw. $T$, so haben wir $\bar{M} = M/\tilde{M}$. Da $\bar{\mathfrak{v}}$ eine Absolutbetragsbewertung von $\bar{T}$ ist, gibt es nach Satz 3 von §2 zu jedem $\bar{s} = s + \tilde{M} \in \bar{M}$ (also für jedes $s \in M$) ein $n$ derart, daß $\bar{s}^n \cdot (\bar{T} + \bar{T}) \subseteq \bar{T}$, d.h. $s^n \cdot (T - T) \subseteq T + \bar{M} = T$. Es ist also $T$ archimedisch beschränkt. — c) In a) (Schluß von „archimedisch beschränkt" auf „Bewertung im weiteren Sinne") und in b) (Schluß von „Bewertung im weiteren Sinne" auf „archimedisch beschränkt") wurden nur die trivialen Fälle ausgelassen, nämlich: „$T - T = T$, also $T$ Bewertungsring einer Exponentenbewertung" bzw. „$\mathfrak{v}$ Exponentenbewertung, also zugehörige Halbgruppe $T$ Bewertungsring". Wir haben daher Satz 4 vollständig bewiesen.

## § 4. Beliebige Ordnungsfunktionen von Körpern

Hilfssatz 11. *Haben $T$, $M^+$, $\sqrt{S}$ die gleiche Bedeutung wie in §3, so gilt stets $T + M^+ \subseteq T_{\sqrt{S}}$.*

Hilfssatz 11 ist eine einfache Ergänzung zu Hilfssatz 10 von §3. Beweis mit den gleichen Überlegungen, wie sie beim Beweis von Hilfssatz 10 unter b) benutzt wurden. Beachte: Da es in $T$ kein Semi-Primideal $P$ mit $\sqrt{S} \supset P \supset M^+$ gibt, folgt $T + M^+ = T_{M^+}$ aus $T + M^+ \supset T_{\sqrt{S}}$.

Bei einer Oberhalbgruppe $T_1$ von $T$ sollen stets $S_1$, $\sqrt{S_1}$, $M_1^+$ für $T_1$ die gleiche Bedeutung haben wie $S$, $\sqrt{S}$, $M^+$ für $T$. Bekannt ist bereits, daß $M_1^+ = M^+$ gilt, falls $T_1 \subset T_{M^+}$. Wir beweisen ergänzend:

Hilfssatz 12. a) *Bei der Oberhalbgruppe $T_1$ von $T$ ist stets $S_1 \supseteq S$.* — b) *Ist $T_1 \subset T_{M^+}$, so folgt aus $S_1 \supset M^+$ stets $S \supset M^+$.* — c) *Ist $T_1 \subset T_{M^+}$, so ist stets $\sqrt{S_1} = \sqrt{S}$.*

Beweis. a) Für $a_1, a_2 \in T_1$ haben wir stets $a_i = c_i \cdot q^{-1}$ $(i = 1, 2)$, wobei $c_i \in T$ und $c \cdot q^{-1} \in T_1$ für alle $c \in T$. Aus $s \cdot (c_1 + c_2) \in T$ für alle $c_1, c_2 \in T$ folgt daher sofort $s \cdot (a_1 + a_2) \in T_1$ für alle $a_1, a_2 \in T_1$. — b) Ist $T_1 \subset T_{M^+}$, so ist $T_1 = T_P$, wobei $P$ ein Semi-Primideal aus $T$ mit $P \supset M^+$, und es ist sicher $S_1 \subset T_1$ und damit $S_1 \subseteq P$, weil anderenfalls $T_1 + T_1 = T_1$, $P + P = P$ wäre, im Widerspruch zu $P \supset M^+$. Sind nun $c_1, c_2$ beliebig aus $T \subseteq T_1$, so folgt aus $s_1 \in S_1 \subseteq P$ sofort $s_1 \cdot (c_1 + c_2) = a \in T_1$; $a = c \cdot q^{-1}$ $(c \in T, q \in T - P)$; $s_1^2 \cdot (c_1 + c_2) = c \cdot (s \cdot q^{-1}) \in T$, weil $s \cdot q^{-1} \in T$ nach Hilfssatz 3 von §1. Gibt es also ein $s_1 \in S_1 - M^+$, so gibt es auch ein $s \in S - M^+$, nämlich $s_1^2$. — Ist $S = M^+ = \sqrt{S}$ bzw. $S_1 = M^+ = \sqrt{S_1}$, so ist auch $S_1 = M^+ = \sqrt{S_1}$ bzw. $S = M^+ = \sqrt{S}$ nach b). Ist aber $S \supset M^+$, $S_1 \supset M^+$,

so wissen wir: Sowohl $\sqrt{S}$ als auch $\sqrt{S_1}$ ist ein Semi-Primideal von $T$ nach Hilfssatz 4; und zwar ist $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} = Q$ eindeutig dadurch festgelegt, daß $Q \supset M^+$, daß aber kein Semi-Primideal $P_1$ mit $Q \supset P_1 \supset M^+$ in $T$ existiert.

Wir betrachten jetzt irgendwelche Ordnungsfunktionen von $K$. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf *kanonische* Ordnungsfunktionen, so daß Ordnungsfunktionen und totale Unterhalbgruppen von $K$ einander umkehrbar eindeutig entsprechen. Die Worte „Verfeinerung" und „Vergröberung" werden sinngemäß wie in §1 benutzt (vgl. die Bemerkungen bei Hilfssatz 3).

SATZ 5. *Unter allen den Ordnungsfunktionen $\mathfrak{v}'$ von $K$, die Vergröberung der festen Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ sind und Bewertungen im weiteren Sinne darstellen, gibt es eine feinste Vergröberung $\mathfrak{v}^*$ von $\mathfrak{v}$, „die durch $\mathfrak{v}$ bestimmte Bewertung im weiteren Sinne". Gehört $\mathfrak{v}$ zur Halbgruppe $T$ und haben $M^+$, $\sqrt{S}$ die gleiche Bedeutung wie bisher, so gehört $\mathfrak{v}^*$ zu $T_{\sqrt{S}}$. Es ist dann und nur dann $\mathfrak{v}^*$ die triviale Bewertung, wenn $\{0\} = S = \sqrt{S}$, d.h. wenn $T + T$ nicht beschränkt ist.*

ZUSATZ. Bei beschränktem $T + T$ haben wir folgende Klassifizierung: $\{0\} = M^+ \subset \sqrt{S}$, $\mathfrak{v}^*$ Absolutbetragsbewertung. — $\{0\} \subset M^+ = \sqrt{S}$, $\mathfrak{v}^*$ Exponentenbewertung. — $\{0\} \subset M^+ \subset \sqrt{S}$, $\mathfrak{v}^*$ „echt zusammengesetzte Bewertung".

Satz 5 und sein Zusatz können nach den bisherigen Betrachtungen als trivial angesehen werden. Man beachte allerdings, daß man Hilfssatz 12 zum Beweise der Zugehörigkeit von $\mathfrak{v}^*$ zu $T_{\sqrt{S}}$ braucht. — Für unsere weiteren Untersuchungen brauchen wir die folgende Definition: Die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ soll *Ordnungsfunktion mit Restklassenkörper* heißen, wenn $T + M^+ = T$ für die zugehörige Halbgruppe $T$ gilt. Zu jeder Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ gibt es eine feinste Vergröberung $\mathfrak{v}_1$, die Ordnungsfunktion mit Restklassenkörper ist. Gehört $\mathfrak{v}$ zu $T$, so gehört $\mathfrak{v}_1$ zu $T_1 = T + M^+$. (Man beachte: $(T + M^+) + M^+ = T + M^+$ wegen $M^+ + M^+ = M^+$). — Aus Hilfssatz 11 und Satz 5 folgt sofort, daß $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_1$ die gleiche Bewertung von $K$ bestimmen. Wir dürfen uns daher im folgenden auf die Betrachtung von Ordnungsfunktionen *mit Restklassenkörper* beschränken. Gehört dann $T$ zu $\mathfrak{v}$, so können wir, genau wie in §2 bei den Bewertungen im weiteren Sinne, den Restklassenkörper $\overline{K} = T_M / M^+$ und in $\overline{K}$ die ausgezeichnete Unterhalbgruppe $\overline{T} = \{a + M^+ \mid a \in T\}$ bilden, aus der rückwärts wieder $T$ gewonnen werden kann: $T = \{a \mid a + M^+ \in \overline{T}\}$.

*Es läßt sich also die Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ mit Restklassenkörper gewinnen durch Zusammensetzung der zu $T_{M^+} = \tilde{T}$ gehörigen Exponentenbewertung $\tilde{\mathfrak{v}}$ mit der zu $\overline{T} = T / M^+$ gehörigen Ordnungsfunktion $\overline{\mathfrak{v}}$ des Restklassenkörpers $\overline{K} = \tilde{T} / M^+$.* Dabei haben offenbar $\overline{M}^+ = M^+ / M^+ = \{\overline{0}\}$ bzw. $\overline{S} = S / M^+$ bzw. $\sqrt{\overline{S}} = \sqrt{S / M^+}$ für $\overline{T}$ die gleiche Bedeutung wie $M^+$ bzw. $S$ bzw. $\sqrt{S}$ für $T$. Wir diskutieren nun die Frage: *Lohnt es sich, Ordnungsfunktionen (mit Restklassenkörper) systematisch zu untersuchen, die keine Bewertungen im weiteren Sinne sind?*

1. Fall. $M^+ = \sqrt{S}$; $\overline{M}^+ = \overline{S} = \sqrt{\overline{S}} = \{\overline{0}\}$. — Hier ist die durch $\mathfrak{v}$ bestimmte Bewertung im weiteren Sinne $\mathfrak{v}^*$ eine Exponentenbewertung, und wir haben in $\overline{K}$ eine Ordnungsfunktion $\overline{\mathfrak{v}}$ mit $\overline{S} = \{\overline{0}\}$; d.h. unser Problem reduziert sich

auf die einfachere Frage: Lohnt die systematische Entwicklung einer Theorie von solchen totalen Unterhalbgruppen $T$ eines Körpers $K$, bei denen $T+T$ *nicht* beschränkt ist? Die Antwort dürfte wohl lauten: Höchstens dann, wenn man auf konkrete Beispiele stößt, an denen zu sehen ist, welche additiven Bedingungen man zweckmäßigerweise einer totalen Unterhalbgruppe $T$ mit nichtbeschränktem $T+T$ auferlegt.

*2. Fall.* $\left|'\overline{S} > \{\overline{0}\} = \overline{M}^+$. — Wir beschränken die Betrachtung gleich auf $\overline{K}$, d.h. wir betrachten unter Weglassung der Querstriche eine totale Unterhalbgruppe $T$ des Körpers $K$ mit $M^+ = \{0\}$, $\left|'S > \{0\}\right.$. Nach §2 und §3 definiert dann $T_{|S} = T_1$ eine Absolutbetragsbewertung $\mathfrak{v}_1$ von $K$, und es kann wohl nicht bezweifelt werden, daß es unbedingt zweckmäßig ist, gestützt auf den Satz von Ostrowski von vornherein $K \subseteq \boldsymbol{C}$, $T_1 = \{a \mid |a| \leqq 1\}$ anzunehmen, woraus dann $\left|'S = \{a \mid |a| < 1\}\right.$, $E^* = T_1 - \left|'S = \{a \mid |a| = 1\}\right.$ folgt. Unter dieser Annahme aber erhält die Gruppe $E^*$ eine ganz bestimmte Struktur, nämlich die „zyklische" Struktur einer Untergruppe der Additionsgruppe $\boldsymbol{R}^+(1)$ aller reellen Zahlen modulo 1. Andererseits hat $T$ — in dem hier allein interessierenden Falle $T_1 > T$ — nach Hilfssatz 5 von §1 die Gestalt $T = \left|'\overline{S} \cup D^*\right.$, wobei $D^*$ eine totale Unterhalbgruppe von $E^*$ ist, d.h.: Die Verfeinerung der Absolutbetragsbewertung $\mathfrak{v}_1$ zur Ordnungsfunktion $\mathfrak{v}$ bedeutet nichts anders als eine Vorordnung von $E^*$ durch Auszeichnung einer totalen Unterhalbgruppe $D^*$, also letzten Endes die Einführung eines Homomorphismus von $E^*$ auf eine total geordnete Gruppe $O$. Die hinsichtlich ihrer natürlichen Topologie nicht kompakten total geordneten Gruppen und die „zyklisch" geordnete, kompakte Gruppe $\boldsymbol{R}^+(1)$ repräsentieren aber zwei fundamental verschiedene Gruppentypen, und es dürfte kaum zweckmäßig sein, $E^*$ gleichzeitig isomorph in $\boldsymbol{R}^+(1)$ und homomorph auf $O$ abzubilden. — Als Endergebnis im zweiten Fall erhalten wir also:

*Es dürfte sich kaum lohnen, solche Ordnungsfunktionen $\mathfrak{v}$ systematisch zu untersuchen, die selbst keine Bewertungen im weiteren Sinne sind und bei denen die durch $\mathfrak{v}$ bestimmte Bewertung im weiteren Sinne $\mathfrak{v}^*$ entweder eine Absolutbetragsbewertung oder auch eine echt zusammengesetzte Bewertung darstellt.*

Das Ergebnis ist also noch wesentlich eindeutiger als bei einer Exponentenbewertung $\mathfrak{v}^*$ (Fall 1).

## § 5. Ergänzungsbemerkungen

1. In §3 war in einer beliebigen totalen Unterhalbgruppe $T$ des Körpers $K$ neben dem größten Primideal $M^+$ das größte Ideal $N^+$ eingeführt worden, und wir hatten bewiesen: $S \supseteq N^+ \supseteq M^+$. Wir können jetzt zeigen:

Satz 6. *Es ist immer $N^+ = M^+$.*

Beweis. Für $S = M^+$ ist die Behauptung trivial. Sei also $S > M^+$ und damit erst recht $\left|'\overline{S} > M^+\right.$. Wir setzen $T_1 = T_{|S}$, $N_1^+ = \{a \cdot q^{-1} \mid a \in N^+, q \in T - \left|'\overline{S}\right.\}$. Dann ist $N_1^+$ (wegen $N^+ + N^+ = N^+$) ein $T_1$-*Ideal*, und es ist sicher $N^+ = M^+$, wenn sogar $N_1^+ = M^+$. Da nun $T_1 + M^+ = T_1$ nach Hilfssatz 10 ist, stellt $\overline{T}_1 = T_1/M^+$ eine totale Unterhalbgruppe des Körpers $\overline{K} = T_{M^+}/M^+$ dar, und es

ist $\overline{N}_1^+ = N_1^+/M^+$ ein $\overline{T}_1$-Ideal. $\overline{T}_1$ definiert eine Absolutbetragsbewertung von $\overline{K}$, weil $S/M^+$ in $\overline{T}_1$ das einzige Semi-Primideal $\neq \{\overline{0}\}$ ist. Wir können also $\overline{K}$ so als Unterkörper von $\boldsymbol{C}$ darstellen, daß $\overline{T}_1 = \{\overline{a} \mid |\overline{a}| \leqq 1\}$ wird. An dieser Darstellung aber läßt sich mühelos ablesen, daß es in $\overline{T}_1$ außer $\{\overline{0}\}$ kein Ideal gibt. Wir erhalten also der Reihe nach: $N_1^+/M^+ = \{\overline{0}\}$; $N_1^+ = M^+$; $N^+ = M^+$.

2. Es sei $T$ eine totale Unterhalbgruppe von $K$, die eine Bewertung $\mathfrak{v}$ im weiteren Sinne definiert. Unter dieser Voraussetzung gilt:

SATZ 7. *Es ist* $S = \{a \mid a \in T,\ a + a \in T\}$.

Beweis. a) Ist $\mathfrak{v}$ eine Exponentenbewertung, so ist $\{a \mid a \in T,\ a + a \in T\} = T$ und $T = S$. — b) Es gehöre zu $T$ eine Absolutbetragsbewertung $\mathfrak{v}$. Dann können wir, analog wie bei Satz 6, von vornherein $K \subseteqq \boldsymbol{C}$, $T = \{a \mid |a| \leqq 1\}$ annehmen. Ist nämlich $\mathfrak{k}$ ein Isomorphismus von $K$ auf den Körper $K'$, der $T$ auf $T'$ abbildet, so hat $\mathfrak{k}$ $S = S'$ für $T'$ die gleiche Bedeutung wie $S$ für $T$, und es ist $\{a' \mid a' \in T',\ a' + a' \in T'\}$ das Bild von $\{a \mid a \in T,\ a + a \in T\}$. Für $K \subseteqq \boldsymbol{C}$, $T = \{a \mid |a| \leqq 1\}$ verifiziert man aber mühelos die (im übrigen wohlbekannte) Gleichung: $S = \{a \mid a \in T,\ a + a \in T\}$. — c) Im Fall einer echt zusammengesetzten Bewertung $\mathfrak{v}$ können wir auf $\overline{K} = T_{M^+}/M^+$, $\overline{T} = (T + M^+)/M^+ = T/M^+$, $S = S/M^+$ die Überlegungen von b) anwenden. Es ergibt sich: $\overline{S} = \{a + M^+ \mid a + M^+ \in \overline{T},\ a + a + M^+ \in \overline{T}\}$, und daraus folgt $S = \{a \mid a \in T,\ a + a \in T\}$ wegen $T + M^+ = T$.

*Zusatzbemerkung.* Schließen wir den trivialen Fall der Exponentenbewertungen aus, so können wir auch kurz $S = \{a \mid a + a \in T\}$ schreiben. Denn im Fall einer Absolutbetragsbewertung erkennt man durch Einbettung von $K$ in $\boldsymbol{C}$ sofort, daß für jedes $a \in K$ aus $a + a \in T$ stets $a \in T$ folgt, und im Fall einer echt zusammengesetzten Bewertung schließen wir aus $a + a \in T$ zunächst auf $(a + M^+) + (a + M^+) \subseteqq T + M^+$ und dann auf $a \in T$ wegen $T + M^+ = T$. — Wir könnten schließlich statt $S = \{a \mid a + a \in T\}$ auch $S = \frac{1}{2}T$ schreiben, da nach Ausschluß der Exponentenbewertungen bei Satz 7 nur Körper der Charakteristik 0 in Betracht kommen, die wir alle als Oberkörper des Körpers der rationalen Zahlen darstellen können. Doch ordnet sich die Schreibweise $\{a \mid a + a \in T\}$ besser in unseren allgemeinen Rahmen ein, in dem ja Summenbildungen wie $T + T$, $T + M^+$ eine Hauptrolle spielen.

*Mathematisches Institut der Universität Bonn*

*(Eingegangen am 6. Mai 1961)*

Atiyah, M.F., und F. Hirzebruch
Math. Zeitschr. 77, 149—187 (1961)

# Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22.9.1961 gewidmet

Von

M. F. Atiyah und F. Hirzebruch

Einleitung. Bereits im Jahre 1950 hat Wu Wen-Tsun [25] eine Beziehung zwischen den Steenrodschen Cohomologie-Operationen

$$Sq^i : H^n(X; \mathbf{Z}_2) \to H^{n+i}(X; \mathbf{Z}_2)$$

und den Stiefel-Whitneyschen Klassen $w_i \in H^i(M; \mathbf{Z}_2)$ einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ hergestellt. Wu definiert Polynome $U_j(w_1, \ldots, w_j)$ vom Gewichte $j$ derart, daß in jeder kompakten differenzierbaren $m$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$ gilt:

(1) $$Sq^i v = U_i \cdot v \quad \text{für alle } v \in H^{m-i}(M; \mathbf{Z}_2).$$

Wu hat seine Resultate auf die Steenrodschen Operationen $\mathscr{P}^r$ in der Cohomologie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ ($q$ ungerade Primzahl) und Pontrjaginsche Klassen (reduziert mod $q$) übertragen [26]. Im Jahre 1953 stellte einer der Verfasser einen merkwürdigen Zusammenhang her zwischen den Wuschen Polynomen und den aus der algebraischen Geometrie bekannten Toddschen Polynomen [10]. Die Note [10] enthält keine Beweise. Diese werden in der vorliegenden Arbeit nachgeholt. Die Beziehungen zwischen Wuschen und Toddschen Polynomen (Satz von Riemann-Roch), die in [10] einen recht formalen Charakter hatten, werden vertieft. Die Formel (1) wird auf Abbildungen $f: Y \to X$ von Mannigfaltigkeiten verallgemeinert im gleichen Sinne, wie Grothendieck [6] den Satz von Riemann-Roch [11] verallgemeinert hat. Der Satz von Grothendieck hat ein differenzierbares Analogon [3]. Adams hat in [2] gezeigt, wie der Chernsche Charakter eines Vektorraumbündels mit Cohomologie-Operationen zusammenhängt. Dies erlaubt uns, die vorhin erwähnte Beziehung zwischen Wuschen und Toddschen Polynomen besser zu verstehen. Durch die Arbeiten [3, 6] ist es ja klar geworden, daß die totale Toddsche Klasse $\sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j)$ aufgefaßt als Element des rationalen Cohomologieringes des klassifizierenden Raumes der unitären Gruppe nach Anwendung des Thomschen Isomorphismus in den Chernschen Charakter eines „Bündels" über dem universellen Thomschen Komplex übergeht. Wir werden sehen, daß durch Reduktion modulo einer Primzahl der differenzierbare Satz von Riemann-Roch in die für Abbildungen verallgemeinerten Wuschen Formeln übergeht.

Durch die Cobordisme-Arbeit von Thom [22] sind prinzipiell alle Relationen mod 2 zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit bekannt. In [8] hat Dold gezeigt, daß die Wuschen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen vollständig sind. Die Wuschen Relationen erhält man, wenn man in (1) für $v$ Polynome in den $w_j$ einsetzt und $Sq^i v$ auf Grund universeller Formeln, die ebenfalls von Wu stammen, berechnet. Nun hat Milnor in [17] entscheidende Resultate über den Cobordisme-Ring orientierter Mannigfaltigkeiten bewiesen, die es prinzipiell ermöglichen, alle Relationen zwischen den Pontrjaginschen Zahlen, welche ja ganze Zahlen sind, aufzustellen. Es gibt da aber nicht nur Relationen modulo einer Primzahl, sondern auch modulo Potenzen einer Primzahl. Zum Beispiel zeigt der Indexsatz [11], daß für eine $M^8$ gilt: $7p_2 - p_1^2 \equiv 0$ (45). Die Pontrjaginschen Zahlen erfüllen keine Relationen modulo 2. Wir zeigen, daß die analog zum Fall der Stiefel-Whitneyschen Klassen mit Hilfe der Steenrodschen Operationen $\mathscr{P}^r$ gebildeten Wuschen Relationen für eine ungerade Primzahl $q$ wieder vollständig sind, d.h. alle Relationen mod $q$ zwischen Pontrjaginschen Zahlen (natürlich nicht die Relationen modulo Potenzen von $q$) implizieren. Von Milnor [17] stammt auch ein komplexes Analogon des Cobordisme-Ringes, das es ermöglicht, alle Relationen zwischen den Chernschen Zahlen aufzustellen. (Es ist dabei gleichgültig, ob man nur projektiv-algebraische Mannigfaltigkeiten oder allgemeiner schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeiten betrachtet, vgl. auch den Bericht [12].) Die Relationen modulo einer Primzahl (nicht die modulo der Potenzen einer Primzahl) können wieder mit Hilfe der Wuschen Methode erhalten werden. Aus dem Satz von Riemann-Roch stammende Ganzzahligkeitssätze [3, 5] liefern Relationen für Chernsche Zahlen. Wir vermuten, daß dies alle Relationen sind. Die Vermutung wird dadurch bestärkt, daß diese Riemann-Roch-Relationen modulo einer Primzahl mit den Wuschen Relationen übereinstimmen, also vollständig sind. Zur Aufstellung aller Relationen modulo einer Primzahl benötigt man nur den elementareren Teil der Milnorschen Arbeit [17], nämlich die Existenz gewisser Mannigfaltigkeiten (5.5 i), ii) der vorliegenden Arbeit) und Aussagen über das Operieren der Steenrodschen Algebra auf der Cohomologie des universellen unitären Thomschen Komplexes $MU$ (s. 5.4). Die Vollständigkeit der Wuschen Relationen ist auf Grund dieser Tatsachen sehr einfach einzusehen.

Wir fassen kurz den Inhalt der einzelnen Paragraphen zusammen: In §1 führen wir den Begriff des Cohomologie-Automorphismus ein. Die Milnorsche Arbeit [16] über die Struktur der Steenrodschen Algebra ermöglicht es uns, die Cohomologie-Automorphismen durch gewisse Potenzreihen zu charakterisieren (Satz 1.8). Der nächste Paragraph bringt Beziehungen zwischen Cohomologie-Automorphismen und charakteristischen Klassen von Vektorraumbündeln (s. z.B. Satz 2.7). In §3 beweisen wir für Abbildungen $f: Y \to X$ von Mannigfaltigkeiten und einen beliebigen Cohomologie-Automorphismus den Satz 3.2, der für die konstante Abbildung $Y \to$ Punkt eine Verallgemeinerung der Wuschen Formel (1) ist. Es genügt 3.2 für Einbettungen und Projektionen zu beweisen. Der Beweis verläuft analog zu dem des differenzier-

baren Riemann-Rochschen Satzes [*3, 13*], nur ist er viel einfacher. Die Diagonalmethode, mit der die Wuschen Formeln häufig hergeleitet werden [*1, 10, 15, 25, 26*], wird nicht herangezogen. Stattdessen wird benutzt, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit in eine Sphäre geeigneter Dimension einbettbar ist. In §4 besprechen wir den Satz von Adams über den Chernschen Charakter und in §5 die Vollständigkeit der Wuschen Relationen zwischen charakteristischen Zahlen.

## § 1. Cohomologie-Automorphismen

**1.1.** In diesem Paragraphen wird die singuläre Cohomologie-Theorie mit Koeffizienten in dem Primkörper $\boldsymbol{Z}_q$ der Charakteristik $q\,(q \neq 0)$ betrachtet. Im allgemeinen wird die Primzahl $q$ festgewählt, so daß wir den Koeffizientenbereich $\boldsymbol{Z}_q$ bei der Anschreibung der Cohomologie-Gruppen weglassen werden, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind. Für einen topologischen Raum $X$ bezeichnet $H^{**}(X)$ das direkte Produkt der $H^i(X)$. Ein Element $z \in H^{**}(X)$ kann auf eine und nur eine Weise als „unendliche Summe"

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i, \qquad z_i \in H^i(X),$$

geschrieben werden. Für eine stetige Abbildung $f: Y \to X$ bezeichnet $f^{**}$ den induzierten Homomorphismus $H^{**}(X) \to H^{**}(Y)$. Für einen Raum $X$, dessen Cohomologie-Gruppen oberhalb einer gewissen Dimension $n_0$ alle verschwinden, können $H^*(X)$ und $H^{**}(X)$ identifiziert werden. (Vgl. [*5*, Teil I, §6.1]; diese Bezeichnungen verwenden wir natürlich auch für andere Koeffizientenbereiche als $\boldsymbol{Z}_q$.)

Definition. *Ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ (für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$) ist eine Operation, die jedem topologischen Raum $X$ einen Ring-Homomorphismus*

$$\lambda: H^{**}(X) \to H^{**}(X)$$

*so zuordnet, daß*

(1) $f^{**}\lambda = \lambda f^{**}$ *für jede stetige Abbildung $f: Y \to X$ topologischer Räume $Y, X$,*

(2) $\lambda =$ *Identität für $X = \boldsymbol{S}^1$ (eindimensionale Sphäre).*

Es wird natürlich nicht verlangt, daß $\lambda$ die Graduierung erhält. Für eine ungerade Primzahl $q$ ist

$$\mathscr{P} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathscr{P}^r$$

ein Cohomologie-Automorphismus, wo

$$\mathscr{P}^r: H^n(X) \to H^{n+2r(q-1)}(X)$$

die $r$-te Steenrodsche reduzierte Potenz für die Primzahl $q$ ist [*20*]. Für $q=2$ ist entsprechend

$$Sq = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^i$$

ein Cohomologie-Automorphismus, wo

$$Sq^i : H^n(X) \to H^{n+i}(X)$$

das $i$-te Steenrodsche reduzierte Quadrat ist (vgl. auch [21]). Durch (2) wird z.B. die Operation $\lambda(x) = x^q \left(x \in H^{**}(X; \mathbf{Z}_q)\right)$ ausgeschlossen.

Es wird später leicht folgen, daß $\lambda : H^{**}(X) \to H^{**}(X)$ ein Isomorphismus ist. (Deshalb sprechen wir bereits jetzt von Cohomologie-*Automorphismen*.) Wir hätten auch allgemeinere Koeffizientenbereiche als die Primkörper der Charakteristik $q$ für die Untersuchung von Cohomologie-Automorphismen zugrunde legen können. Manche der folgenden Sätze blieben dann erhalten. Aber da das für die Zwecke der vorliegenden Arbeit nicht erforderlich ist, haben wir uns der Bequemlichkeit wegen auf die Primkörper beschränkt. Den Primkörper $\boldsymbol{Q} = \mathbf{Z}_0$ der Charakteristik 0 haben wir ausgeschlossen, da für ihn jeder Cohomologie-Automorphismus die Identität ist.

**1.2.** *Ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ ist bereits definiert, wenn man ihn für alle CW-Komplexe so definiert hat, daß alle Bedingungen der Definition* 1.1 *im Rahmen der Kategorie der CW-Komplexe* [24] *erfüllt sind.* An Stelle der $CW$-Komplexe könnte man auch die simplizialen Komplexe wählen. Eine entsprechende Bemerkung über Cohomologie-Operationen findet sich bereits bei Serre [19, §4], der dort den allgemeinen Begriff der Cohomologie-Operation zuerst eingeführt hat. Wir wollen diese Dinge hier nicht näher ausführen. Wir erinnern nur daran, daß die geometrische Realisierung $|K|$ eines semisimplizialen Komplexes $K$ ein $CW$-Komplex ist [14]. Wenn $K$ insbesondere der singuläre Komplex $SX$ eines topologischen Raumes ist, dann hat man eine kanonische Abbildung $j_X : |SX| \to X$, welche Isomorphismen aller Cohomologie-Gruppen induziert. Für eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ hat man eine stetige Abbildung $f' : |SY| \to |SX|$ und das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} |SY| & \xrightarrow{f'} & |SX| \\ {\scriptstyle j_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array} \tag{3}$$

Wegen der Abbildung $j_X$ weiß man also, wie $\lambda$ auf $H^{**}(X)$ zu definieren ist, wenn man es auf $H^{**}(|SX|)$ kennt. Man verwendet (3), um zu zeigen, daß der nun für alle topologischen Räume definierte Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ mit Abbildungen vertauschbar ist.

Wir stellen weiter fest, daß *ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ sogar bereits definiert ist, wenn er für alle endlichen CW-Komplexe so definiert ist, daß alle Bedingungen der Definition* 1.1 *im Rahmen der Kategorie der endlichen CW-Komplexe erfüllt sind.*

Für jeden $CW$-Komplex $X$ hat man nämlich die Isomorphie

$$H^{**}(X; \mathbf{Z}_q) = \varprojlim H^*(X_\alpha; \mathbf{Z}_q), \tag{4}$$

wo $X_\alpha$ alle endlichen Teilkomplexe durchläuft (inverser Limes). Für die Isomorphie (4) wird ausgenutzt, daß der Koeffizientenbereich $\boldsymbol{Z}_q$ ein Körper ist. (Vgl. hierzu [*9*, Chap. VIII, Theorem 5.7 und Exercise F2].)

Die Überlegungen dieses Abschnitts zeigen, daß gewisse im nächsten Abschnitt zu formulierende Eigenschaften von $\lambda$ nur für endliche $CW$-Komplexe bewiesen zu werden brauchen.

**1.3.** Zunächst eine Bemerkung über das Cup-Produkt. Für eine Triade $(X; Y_1, Y_2)$ topologischer Räume $(Y_1 \subset X,\ Y_2 \subset X)$ kann man die singulären (semi-simplizialen) Komplexe $SY_1 \cup SY_2$ und $S(Y_1 \cup Y_2)$ betrachten, welche Unterkomplexe von $SX$ sind. Die Triade $(X; Y_1, Y_2)$ heiße eigentlich, wenn die Inklusion $SY_1 \cup SY_2 \subset S(Y_1 \cup Y_2)$ Isomorphismen der ganzzahligen Homologiegruppen dieser Komplexe und damit auch Isomorphismen aller Homologie- und Cohomologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten induziert [*9*, Chap. VII, §11]. Zum Beispiel ist $(X; Y_1, Y_2)$ dann eigentlich, wenn $X$ ein $CW$-Komplex ist und $Y_1$, $Y_2$ Unterkomplexe sind. Verwendet man einen Ring als Koeffizientenbereich für die singuläre Cohomologie, dann ist für eine eigentliche Triade $(X; Y_1, Y_2)$ das Cup-Produkt definiert: Für $a \in H^n(X, Y_1)$ und $b \in H^m(X, Y_2)$ ist $a \cup b = ab$ ein Element von $H^{n+m}(X, Y_1 \cup Y_2)$. Die übliche Definition des Cup-Produkts liefert $ab$ zunächst nur als Element von $H^{n+m}(SX, SY_1 \cup SY_2)$. Diese Gruppe ist aber bei einer eigentlichen Triade kanonisch isomorph zu $H^{n+m}(SX, S(Y_1 \cup Y_2)) = H^{n+m}(X, Y_1 \cup Y_2)$. (Man ziehe das Fünfer-Lemma heran.)

Satz. *Ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ für die Cohomologie mit Koeffizienten $\boldsymbol{Z}_q$ sei gegeben* (1.1). *Er kann dann auf eine und nur eine Weise für beliebige Raumpaare $(X, Y)$ definiert werden,*

$$\lambda : H^{**}(X, Y) \to H^{**}(X, Y),$$

*so daß er für $Y = \emptyset$ mit dem gegebenen $\lambda$ übereinstimmt und daß gilt:*

(i) *$\lambda$ ist additiv.*

(ii) *$\lambda$ ist mit Abbildungen $(X, Y) \to (X', Y')$ vertauschbar.*

(iii) *Für eine eigentliche Triade $(X; Y_1, Y_2)$, für $a \in H^{**}(X, Y_1)$, $b \in H^{**}(X, Y_2)$ und damit $a \cup b \in H^{**}(X, Y_1 \cup Y_2)$ gilt: $\lambda(a \cup b) = \lambda a \cup \lambda b$.*

(iv) *$\lambda$ ist stabil.*

(v) *$\lambda$ ist mit dem Corand-Operator $\delta : H^{**}(Y) \to H^{**}(X, Y)$ vertauschbar.*

Beweis. Für ein Paar $(X, Y)$ endlicher $CW$-Komplexe ($Y$ Teilkomplex) ist

$$H^*(X, Y) = \tilde{H}^*(X/Y), \tag{5}$$

wo $X/Y$ aus $X$ durch Identifikation von $Y$ zu einem Punkt ensteht, der in $X/Y$ die Rolle des Basispunktes übernimmt. $\tilde{H}^*$ bezeichnet die bezüglich des Basispunktes „reduzierte" Cohomologie ($\tilde{H}^i = H^i$ für $i > 0$). Damit ist klar, wie $\lambda$ für ein Paar endlicher $CW$-Komplexe definiert werden muß. Für ein beliebiges Paar $(X, Y)$ von $CW$-Komplexen ($Y$ Teilkomplex) gilt in Verallgemeinerung

von (4)

$$H^{**}(X, Y) = \lim_{\leftarrow} H^*(X_\alpha, Y \cap X_\alpha), \tag{6}$$

wo $X_\alpha$ die endlichen Teilkomplexe durchläuft. $\lambda$ wird nach (6) für $(X, Y)$ definiert. Man sieht leicht, daß die Definition nicht davon abhängt, wie der Raum $X$ als $CW$-Komplex dargestellt wird und daß $\lambda$ mit Abbildungen innerhalb der Kategorie der Paare von $CW$-Komplexen vertauschbar ist. (Vgl. die entsprechenden Überlegungen bei M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, Analytic cycles on complex manifolds (erscheint demnächst in „Topology", Pergamon Press), §1). Für ein beliebiges Paar $(X, Y)$ topologischer Räume ist $SY$ Teilkomplex von $SX$ und

$$j_X : (|SX|, |SY|) \to (X, Y) \tag{7}$$

induziert Isomorphismen der Cohomologie-Gruppen. Damit ist $\lambda$ für ein beliebiges Paar definiert. (ii) folgt unmittelbar aus (3). Nun zum Beweis von (iii). Für Paare $(X_1, Y_1)$ und $(X_2, Y_2)$ endlicher $CW$-Komplexe betrachten wir die Homomorphismen

$$\begin{cases} H^*(X_1, Y_1) \otimes H^*(X_2, Y_2) \xrightarrow{\alpha} H^*(X_1 \times X_2, Y_1 \times X_2 \cup X_1 \times Y_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad H^*\big((X_1/Y_1) \times (X_2/Y_2)\big) \end{cases} \tag{8}$$

(Tensorprodukt über $\mathbf{Z}_q$), wobei $\alpha$ und $\beta \circ \alpha$ in bekannter Weise durch das Cup-Produkt gegeben werden, während $\beta$ durch

$$X_1/Y_1 \times X_2/Y_2 \to (X_1/Y_1 \times X_2/Y_2)/(X_1/Y_1 \vee X_2/Y_2) = X_1 \times X_2/(Y_1 \times X_2 \cup X_1 \times Y_2)$$

induziert wird (vgl. [4, §1]). Bezeichnet man mit $p_1$ und $p_2$ die Projektionen von $X_1/Y_1 \times X_2/Y_2$ auf $X_1/Y_1$ bzw. $X_2/Y_2$, dann ist $(\beta \circ \alpha)(x_1 \otimes x_2) = p_1^* x_1 \cup p_2^* x_2$. Daraus folgt, daß $\lambda$ mit $\beta \circ \alpha$ vertauschbar ist, wobei wir $\lambda$ auf dem in (8) vorkommenden Tensorprodukt durch $\lambda(x_1 \otimes x_2) = \lambda x_1 \otimes \lambda x_2$ operieren lassen. Da $\beta$ injektiv und mit $\lambda$ vertauschbar ist, ist $\lambda$ auch mit $\alpha$ vertauschbar. Wir setzen nun $X_1 = X_2 = X$. Die Diagonalbildung von $X$ in $X \times X$ bildet $Y_1 \cup Y_2$ in $Y_1 \times X_2 \cup X_1 \times Y_2$ ab.

$$\Delta : (X, Y_1 \cup Y_2) \to (X \times X, Y_1 \times X \cup X \times Y_2).$$

Die zu beweisende Gleichung (iii) ist nichts anderes als die Vertauschbarkeit von $\Delta^* \circ \alpha$ mit $\lambda$, die aber richtig ist, da $\lambda$ mit $\alpha$ und mit $\Delta^*$ vertauschbar ist. Man beweist (iii) in voller Allgemeinheit, indem man (6) und die Realisierungen semi-simplizialer Komplexe verwendet. Die Einzelheiten mögen dem Leser überlassen sein.

Wir kommen nun zum Beweis von (iv). Es sei $X$ ein endlicher $CW$-Komplex mit Basispunkt. Die 1-Sphäre $\mathbf{S}^1$ werde kanonisch orientiert und sei ebenfalls mit Basispunkt versehen. Unter dem Koeffizienten-Homomorphismus $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_q$ geht das zur Orientierung gehörige erzeugende Element von $H^1(\mathbf{S}^1; \mathbf{Z})$ in ein erzeugendes Element $g$ von $H^1(\mathbf{S}^1; \mathbf{Z}_q)$ über. Die Einhängung von $X$ ist der

$CW$-Komplex

$$S(X) = S^1 \wedge X = S^1 \times X / S^1 \vee X, \quad \text{vgl. } [4, \S 1].$$

Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$E : \tilde{H}^*(X) \to \tilde{H}^*(S^1 \wedge X),$$

der wie folgt definiert ist. Man setzt in (8) $X_1 = S^1$, $X_2 = X$ und für $Y_1$, $Y_2$ den jeweiligen Basispunkt. Dann ist

$$E(x) = \alpha(g \otimes x), \quad x \in \tilde{H}^*(X) = H^*(X_2, Y_2).$$

Wie wir vorhin bemerkt haben, ist $\lambda$ mit $\alpha$ vertauschbar. Nach (2) ist $\lambda(g) = g$. Also ist $\lambda$ mit $E$ vertauschbar. Dies ist gerade die Stabilität.

(v) braucht wegen (6) und (7) nur für ein Paar $(X, Y)$ endlicher $CW$-Komplexe bewiesen zu werden. In $Y$ werden ein Basispunkt ausgezeichnet. Es genügt dann, die Behauptung für $y \in \tilde{H}^*(Y)$ nachzuweisen. Es sei $f$ die Einbettung von $Y$ in $X$. Der Abbildungskegel $C_f$ ist ein endlicher $CW$-Komplex mit Basispunkt und auf kanonische Weise homotopie-äquivalent mit $X/Y$, vgl. [4, 18]. Es gibt eine Abbildung $Qf$ von $C_f$ in $S^1 \wedge Y$ und $\delta$ ist gleich $(Qf)^* \circ E$ gefolgt von dem kanonischen Isomorphismus $\tilde{H}^*(C_f) \cong \tilde{H}^*(X/Y) = H^*(X, Y)$. Die Behauptung (v) folgt nun aus (1) und der vorhin bewiesenen Vertauschbarkeit von $\lambda$ mit $E$.

**1.4.** Ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ ist bereits durch sein Operieren auf den Cohomologie-Ringen der endlichen $CW$-Komplexe bestimmt (1.2). Aus dieser Tatsache und aus 1.3 (iv) folgert man, daß sich $\lambda$ in der Form

$$\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \tag{9}$$

schreiben läßt, wo $\lambda_j : H^n(X) \to H^{n+j}(X)$, ($X$ beliebiger topologischer Raum, $n = 0, 1, 2, \ldots$), eine stabile Operation ist, die die Dimension um $j$ erhöht. (9) bedeutet, daß für $z \in H^{**}(X)$ mit $z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i$ und $z_i \in H^i(X)$

$$\lambda_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_j z_i \tag{10}$$

und

$$\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j z. \tag{11}$$

Auf Grund der Definition von $H^{**}$ sind die unendlichen Summen (10) und (11) sinnvoll.

Auf $H^*(S^n)$ ist $\lambda$ gleich der Identität ((2) und 1.3 (iv): Vertauschbarkeit mit $E$, die $n$-Sphäre $S^n$ ist die $(n-1)$-fache Einhängung von $S^1$). Für einen endlichen $CW$-Komplex $X$, dessen $n$-Skelett mit $X^n$ bezeichnet werde, ist $\lambda$ auf $H^*(X^n, X^{n-1})$ die Identität, da $X^n/X^{n-1}$ ein Bukett von Sphären ist.

Wegen der exakten Sequenzen

$$H^n(X^n, X^{n-1}) \to H^n(X^n) \to 0, \qquad 0 \to H^n(X) \to H^n(X^n)$$

ist $\lambda_0$ die Identität (und zwar wegen 1.2 für jeden topologischen Raum $X$).

Lemma. *Für jeden Raum $X$ ist $\lambda$ ein Automorphismus von $H^{**}(X)$.*

Beweis. Wegen 1.2 genügt es, dies für endliche $CW$-Komplexe nachzuweisen, da dann die Existenz des inversen Cohomologie-Automorphismus $\lambda^{-1}$ gesichert ist. In diesem Fall ist die Behauptung klar, da $\lambda$ wegen (9) und $\lambda_0 =$ Identität injektiv ist und $H^{**}(X) = H^*(X)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbf{Z}_q$ ist. Man kann auch $\lambda^{-1}$ sofort explizit angeben. Man setze

$$\lambda = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1 + \mu .$$

Dann ist

$$\lambda^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \mu^j , \tag{12}$$

wo $\mu^j$ die $j$-fache Iteration von $\mu$ bedeutet. Es ist klar, daß (12) die $j$-dimensionale Komponente von $\lambda^{-1}$ als endliche Summe

$$\sum a_{i_1 \dots i_r} \lambda_{i_1} \circ \cdots \circ \lambda_{i_r} \qquad (i_1 + \cdots + i_r = j,\ a_{i_1 \dots i_r} \in \mathbf{Z}_q)$$

liefert.

Cohomologie-Automorphismen können hintereinander geschaltet werden. Die Cohomologie-Automorphismen (für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$) bilden eine Gruppe, die mit $\mathrm{Coh}(\mathbf{Z}_q)$ bezeichnet werde.

**1.5.** Satz. *Wenn $q \neq 2$, dann sind für einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ alle Komponenten $\lambda_i$* (vgl. (9)) *mit ungeradem $i$ gleich* 0.

Beweis. $H^{**}(X \times \mathbf{S}^1)$ enthält $H^{**}(X)$ als Unterring und ist ein freier Modul über $H^{**}(X)$ mit einer Basis $1, g \in H^{**}(X \times \mathbf{S}^1)$, $(g \in H^1,\ gg = 0)$, für die $\lambda(g) = g$. Für $x \in H^m(X)$ ist

$$\lambda(xg) = \lambda x \cdot g = (-1)^m \lambda(gx) = (-1)^m g \cdot \lambda x = (-1)^m \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+m} \lambda_i x \cdot g .$$

Es folgt $\lambda_i = (-1)^i \lambda_i$ und damit die Behauptung.

Der Satz ist für $q = 2$ falsch, wie der Cohomologie-Automorphismus $Sq$ (s. 1.1) zeigt.

**1.6.** Zusammenfassend können wir sagen, daß ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ (für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$) eine natürliche Transformation der singulären Theorie in sich ist, welche die multiplikative Struktur und für $q \neq 2$ die $\mathbf{Z}_2$-Graduierung erhält:

$$\begin{cases} H^{**}(X) = H^{ev}(X) + H^{od}(X), \\ H^{ev}(X) = \prod_{m=0}^{\infty} H^{2m}(X), \qquad H^{od}(X) = \prod_{m=0}^{\infty} H^{2m+1}(X), \end{cases} \tag{13}$$

(vgl. [4, § 1.10]).

Wir unterscheiden jetzt die beiden Fälle $q$ ungerade und $q = 2$.

a) *q ungerade.*

Der Ring der formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten $x$ über $\mathbf{Z}_q$ werde mit $\mathbf{Z}_q[[x]]$ bezeichnet (entsprechende Bezeichnung für mehrere Unbestimmte). $\mathbf{Z}_q[[x]]$ ist isomorph zu $H^{**}(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}))$, dem Cohomologie-Ring des unendlich-dimensionalen komplexen projektiven Raumes. Wir stiften einen Isomorphismus, indem wir $x$ ein von 0 verschiedenes (und damit erzeugendes) Element von $H^2(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})) \cong \mathbf{Z}_q$ zuordnen. Jetzt ist $\lambda(x)$ wohldefiniert als Element von $\mathbf{Z}_q[[x]]$, und zwar ist es wegen $\lambda_0 =$ Identität von der Form

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j, \qquad b_j \in \mathbf{Z}_q, \qquad b_1 = 1. \tag{14}$$

Da $\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})$ ein Eilenberg-MacLanescher Raum $K(\mathbf{Z}, 2)$ ist, gilt (14), wenn man $x$ durch ein beliebiges Element von $H^2(X, Y)$ ersetzt, welches Reduktion einer *ganzzahligen* 2-dimensionalen Cohomologie-Klasse von $(X, Y)$ ist. Insbesondere trifft das zu für $X = \boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})$ und $Y = \emptyset$. Nun ist

$$H^{**}(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})) = \mathbf{Z}_q[[x_1, x_2]],$$

wo $x_1$, $x_2$ Unbestimmte über $\mathbf{Z}_q$ sind, die bei dem Isomophismus 2-dimensionalen Cohomologieklassen entsprechen. Aus der Additivität von $\lambda$ ergibt sich folgende Gleichung in $\mathbf{Z}_q[[x_1, x_2]]$

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j (x_1 + x_2)^j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_1^j + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_2^j. \tag{15}$$

Elementare Eigenschaften der Binomialkoeffizienten implizieren, daß $b_j = 0$, wenn $j$ keine Potenz von $q$ ist. Wir setzen

$$\lambda(x) = x + a_1 x^q + a_2 x^{q^2} + \cdots + a_j x^{q^j} + \cdots, \quad a_j \in \mathbf{Z}_q. \tag{16}$$

Die Potenzreihe $\lambda(x) \in \mathbf{Z}_q[[x]]$ hängt offenbar nicht von der Auswahl des erzeugenden Elementes von $H^2(P_\infty(\boldsymbol{C}))$ ab, das wir $x$ zugeordnet haben.

b) $q = 2$.

Der Ring $\mathbf{Z}_2[[x]]$ wird jetzt als Cohomologie-Ring $H^{**}(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R}))$ des unendlich-dimensionalen reellen projektiven Raumes realisiert, indem wir der Unbestimmten $x$ das von 0 verschiedene Element von $H^1(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R})) \cong \mathbf{Z}_2$ zuordnen. Wie in a) erhält man die Potenzreihe

$$\lambda(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_j x^{2^j} + \cdots, \quad a_j \in \mathbf{Z}_2. \tag{17}$$

Die Gleichung (17) bleibt richtig, wenn man $x$ durch ein beliebiges Element von $H^1(X, Y)$ ersetzt, da $\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R})$ ein Eilenberg-MacLanescher Raum $K(\mathbf{Z}_2, 1)$ ist.

Bei der Definition der Potenzreihe $\lambda(x)$ wurde die Additivität von $\lambda$ benutzt, aber nicht, daß $\lambda$ die multiplikative Struktur erhält.

Mit $G(\mathbf{Z}_q)$ werde die Gruppe der Potenzreihen der Gestalt (16) bzw. (17) bezüglich des Ineinander-Setzens bezeichnet:

$$f(x) \circ g(x) = f(g(x)).$$

Ordnet man jedem Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ die Potenzreihe $\lambda(x)$ zu, dann erhält man einen Homomorphismus

$$\text{Coh}(\boldsymbol{Z}_q) \to G(\boldsymbol{Z}_q), \quad \text{(vgl. Schluß von 1.4)}. \tag{18}$$

Wir werden in 1.8 sehen, daß (18) bijektiv, also ein Isomorphismus ist. Entscheidend sind dafür die Ergebnisse von Milnor über die Steenrodsche Algebra.

**1.7. Über die Steenrodsche Algebra.** Wir folgen den Bezeichnungen von Milnor [*16*]. Es sei also $S^*$ die Steenrodsche Algebra für die Primzahl $q$. Die Algebra $S^*$ ist graduiert, assoziativ und vom endlichen Typ über $\boldsymbol{Z}_q$, d.h.

$$S^* = \sum_{i=0}^{\infty} S^i,$$

und $S^i$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\boldsymbol{Z}_q$. ($S^0$ hat die Dimension 1.) Nach Cartan und Serre [*7*, *19*] ist $S^i$ die additive Gruppe der stabilen Operationen von der Cohomologie mit Koeffizienten $\boldsymbol{Z}_q$ in sich, die die Dimension um $i$ erhöhen. Also ist für jeden Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ die Komponente $\lambda_i$ ein Element von $S^i$. Jedoch ist $\lambda$ selbst nicht ein Element von $S^*$. Wir führen deshalb in Analogie zu 1.1 das direkte Produkt der $S^i$ ein und nennen es $S^{**}$. Die Cohomologie-Automorphismen entsprechen dann bestimmten Elementen von $S^{**}$. Es handelt sich nun darum, festzustellen, welche Elemente von $S^{**}$ Cohomologie-Automorphismen sind.

Milnor definiert in §3 seiner Arbeit [*16*] den Ring-Homomorphismus

$$\psi^* : S^* \to S^* \otimes S^* \quad \text{(Tensorprodukte immer über } \boldsymbol{Z}_q),$$

welcher $S^*$ zu einer Hopfschen Algebra macht. Wir setzen $S^* \otimes S^* = U^*$. Dann ist

$$U^n = \sum_{i+j=n} S^i \otimes S^j$$

und $\psi^*$ bildet $S^n$ in $U^n$ ab. Es ist klar, daß $\psi^*$ auf natürliche Weise einen Homomorphismus

$$\psi^{**} : S^{**} \to U^{**}, \qquad U^{**} = \prod_{n=0}^{\infty} U^n,$$

induziert. Wir nennen nun diejenigen Elemente $c$ von $S^{**}$ *multiplikativ*, welche von 0 verschieden sind und für die

$$\psi^{**} c = c \otimes c,$$

das soll heißen

$$\psi^* c_k = \sum_{i+j=k} c_i \otimes c_j, \qquad \text{(vgl. auch [1])}.$$

Da $S^*$ eine Hopfsche Algebra ist, folgt sofort $c_0 = 1$.

Lemma. *Für ungerades $q$ ist ein Element von $S^{**}$ dann und nur dann ein Cohomologie-Automorphismus, wenn es multiplikativ ist und wenn seine ungerade-dimensionalen Komponenten verschwinden. Für $q = 2$ ist ein Element von*

*$S^{**}$ dann und nur dann ein Cohomologie-Automorphismus, wenn es multiplikativ ist.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus 1.5 und aus der Definition von $\psi^*$ (s. [*16*, §3, Lemma 1]). Wir hätten den Begriff des Cohomologie-Automorphismus auch so fassen können, daß alle multiplikativen Elemente von $S^{**}$, auch diejenigen, deren ungerade-dimensionalen Komponenten nicht alle verschwinden, darunterfallen. Aber der Einfachheit wegen haben wir uns für $q \neq 2$ auf die beschränkt, welche die $\mathbf{Z}_2$-Graduierung erhalten (1.6) oder (äquivalent) auf die, welche Ring-Homomorphismen $H^{**}(X) \to H^{**}(X)$ sind.

**1.8.** Satz. *Der Homomorphismus* $\mathrm{Coh}(\mathbf{Z}_q) \to G(\mathbf{Z}_q)$ *der Gruppe der Cohomologie-Automorphismen in die Gruppe* $G(\mathbf{Z}_q)$ (s. 1.6 (18)) *ist bijektiv.*

Beweis für ungerades $q$: Milnor [*16*] betrachtet das Dual $S_*$ der Steenrodschen Algebra $S^*$. Da $S^{**} = \mathrm{Hom}(S_*, \mathbf{Z}_q)$, hat man die Paarung $\langle a, a' \rangle$ zwischen Elementen $a \in S^{**}$ und $a' \in S_*$, die von Milnor nur für $a \in S^*$ betrachtet wird. Für homogen-dimensionale Elemente $a, b \in S^*$ und $a', b' \in S_*$ gilt

$$\langle a \otimes b, a' \otimes b' \rangle = (-1)^{\dim b \cdot \dim a'} \langle a, a' \rangle \cdot \langle b, b' \rangle. \tag{19}$$

Die Homomorphismen

$$\psi^* : S^* \to S^* \otimes S^* \quad \text{und} \quad \psi_* : S_* \otimes S_* \to S_*$$

sind per definitionem dual ($\psi_*$ ist das Produkt im Ringe $S_*$). Also ist, wie man leicht überlegt,

$$\langle \psi^{**} u, a' \otimes b' \rangle = \langle u, \psi_*(a' \otimes b') \rangle \quad \text{für } u \in S^{**}. \tag{20}$$

Wenn wir für $u$ einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ einsetzen, dann folgt (Lemma 1.7 und (19), (20))

$$\langle \lambda, a' b' \rangle = \langle \lambda, a' \rangle \cdot \langle \lambda, b' \rangle, \tag{21}$$

wo $a' b' = \psi_*(a' \otimes b')$ das Produkt in der Algebra $S_*$ bezeichnet. Nach Milnor [*16*] ist $S_*$ das Tensorprodukt der durch Unbestimmte $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ erzeugten Grassmannschen Algebra ($\tau_i \in S_{2q^i-1}$) und dem Polynomring in Unbestimmten $\xi_1, \xi_2, \ldots$ über $\mathbf{Z}_q$, wo $\xi_i \in S_{2q^i-2}$. Wegen $S^{**} = \mathrm{Hom}(S_*, \mathbf{Z}_q)$ und wegen (21) ist ein Cohomologie-Automorphismus durch die Werte $\langle \lambda, \xi_i \rangle$ und $\langle \lambda, \tau_i \rangle$ festgelegt ($\langle \lambda, 1 \rangle = 1$). Nun betrachten wir mit Milnor den Linsenraum $X = \lim_{N \to \infty} \mathbf{S}^{2N+1}/\mathbf{Z}_q$ und die erzeugenden Elemente $\alpha \in H^1(X; \mathbf{Z}_q)$ und $\beta \in H^2(X; \mathbf{Z}_q)$. Dann folgt [*16*, Lemma 4 und 6]

$$\lambda(\alpha) = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \langle \lambda, \tau_i \rangle \beta^{q^i} \tag{22}$$

und deshalb $\langle \lambda, \tau_i \rangle = 0$, da $\dim \beta^{q^i} - \dim \alpha$ ungerade ist. Ebenso folgt

$$\lambda(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \lambda, \xi_i \rangle \beta^{q^i}, \qquad (\xi_0 = 1). \tag{23}$$

Für die natürliche Projektion

$$\pi : X \to \boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C})$$

ist $\pi^* g = \beta$, wo $g$ ein geeignetes erzeugendes Element von $H^2(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}); \boldsymbol{Z}_q)$ ist. Da $\pi^{**}$ injektiv ist, folgt aus (23)

$$\lambda(g) = g + \sum_{i=1}^{\infty} \langle \lambda, \xi_i \rangle g^{q^i}.$$

Der Koeffizient $a_j$ der Potenzreihe $\lambda(x)$ in (16) ist also gleich $\langle \lambda, \xi_j \rangle$. Damit ist bewiesen, daß $\mathrm{Coh}(\boldsymbol{Z}_q) \to G(\boldsymbol{Z}_q)$ injektiv ist.

Es bleibt zu zeigen, daß jede Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{q^j} \in G(\boldsymbol{Z}_q), \qquad (a_0 = 1), \tag{24}$$

als Potenzreihe eines Cohomologie-Automorphismus auftritt. Wir definieren eine Element $\lambda \in S^{**}$, indem wir das entsprechende Element $\lambda' \in \mathrm{Hom}(S_*, Z_q)$ angeben. $\lambda'$ ist durch folgende Angaben bestimmt.

a) $\lambda' : S_* \to \boldsymbol{Z}_q$ ist ein Ring-Homomorphismus,

b) $\lambda'(\tau_i) = \langle \lambda, \tau_i \rangle = 0$, $\lambda'(\xi_j) = \langle \lambda, \xi_j \rangle = a_j$.

In §4 von [*16*] betrachtet Milnor (für endliche $CW$-Komplexe $X$) einen Ring-Homomorphismus $\lambda^*$, den wir hier mit $\Lambda$ bezeichnen, um Verwechslungen zu vermeiden:

$$\Lambda : H^*(X) \to H^*(X) \otimes S_*.$$

Man kann $\Lambda$ ohne weiteres für einen beliebigen Raum $X$ definieren, wenn man $H^*(X)$ durch $H^{**}(X)$ ersetzt. $\lambda''$ sei der Ring-Homomorphismus

$$\lambda'' : H^*(X) \otimes S_* \to H^*(X) \quad \text{mit} \quad \lambda''(a \otimes b) = a \cdot \lambda' b.$$

Dann ist nach [*16*, Lemma 4]

$$\lambda = \lambda'' \circ \Lambda.$$

Also ist $\lambda : H^*(X) \to H^*(X)$ auch ein Ring-Homomorphismus und deshalb, wie man leicht sieht, ein Cohomologie-Automorphismus mit der gegebenen Potenzreihe (24).

Der Satz wird für $q = 2$ fast genauso bewiesen (vgl. [*16*, Appendix 1]).

**1.9.** Für $q = 2$ läßt sich jeder Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ durch die Steenrodschen reduzierten Quadrate $Sq^i$ ausdrücken, d.h. die $j$-dimensionale Komponente $\lambda_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$) ist ein „Polynom" in den $Sq^i$. Dies ist klar, da die Steenrodsche Algebra durch die $Sq^i$ erzeugt wird. Für ungerades $q$ wird die Steenrodsche Algebra durch die Bocksteinsche Operation $\delta$ und die Steenrodschen reduzierten Potenzen $\mathscr{P}^r$ (vgl. 1.1) erzeugt. Es gilt aber auch hier:

Lemma. *Ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$ ($q$ ungerade Primzahl) läßt sich durch die Steenrodschen reduzierten Potenzen ausdrücken, d.h. $\lambda_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$) ist ein Polynom in den $\mathscr{P}^r$, (oder*

*anders gesagt: $\lambda_j$ gehört zu der durch die $\mathscr{P}^r$ erzeugten Unteralgebra $St^*$ von $S^*$). Insbesondere ist $\lambda_j = 0$, wenn $j \not\equiv 0 \pmod{2(q-1)}$.*

BEWEIS. $\lambda$ nimmt auf allen Elementen von $S_*$, die dem durch $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ erzeugten Ideal $I$ von $S_*$ angehören, den Wert 0 an (vgl. (22)). Aus (19) und (20) folgt, daß jedes Element von $St^*$ das Ideal $I$ annuliert. Aus [*16*, Lemma 8] folgt umgekehrt, daß ein Element von $S^*$, das $I$ annuliert, zu $St^*$ gehört.

**1.10.** Die Steenrodsche Algebra $S^*$ besitzt einen kanonischen Anti-Automorphismus [*16*, §7], der zu einem Anti-Automorphismus von $S^{**}$ erweitert werden kann. Aus seiner Definition folgt unmittelbar, daß er einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ in $\lambda^{-1}$ überführt.

## § 2. Charakteristische Klassen

**2.1. Bezeichnungen.** Wir betrachten im folgenden reelle Vektorraum-Bündel, von denen wir durchweg voraussetzen, daß sie einen *parakompakten Basisraum* haben. Sie lassen dann die orthogonale Gruppe als Strukturgruppe zu, und es gibt immer Bündelabbildungen in das universelle Bündel [*15*]. In den jeweiligen Abschnitten wird die *singuläre* Cohomologie mit Koeffizienten in einen festen Primkörper der Charakteristik $q$ betrachtet, wobei auch $q = 0$ vorkommen wird. Die Koeffizientenbereiche werden also $\boldsymbol{Z}_q$ $(q \neq 0)$ bzw. $\boldsymbol{Q}$, der Körper der rationalen Zahlen sein, der auch mit $\boldsymbol{Z}_0$ bezeichnet werde. Bei der Anschreibung der Cohomologie-Gruppen wird der Koeffizientenbereich häufig weggelassen. Falls $q \neq 2$, wird immer vorausgesetzt, daß die auftretenden Vektorraum-Bündel orientiert sind, also die spezielle orthogonale Gruppe als Strukturgruppe zulassen.

Wir setzen die Theorie der charakteristischen Klassen als bekannt voraus [*5*, *11*, *15*]. Die Stiefel-Whitneyschen Klassen werden nur für $q = 2$ betrachtet. Die Pontrjaginschen Klassen sind ganzzahlige Klassen. Wenn wir für die Cohomologie den Primkörper der Charakteristik $q$ verwenden, dann bezeichnet $p_i$ der Einfachheit wegen das Bild der ganzzahligen $4i$-dimensionalen Pontrjaginschen Klasse unter dem Koeffizienten-Homomorphismus von $\boldsymbol{Z}$ in den Primkörper. Für $q = 2$ ist also $p_i = w_{2i}^2$, wo $w_j$ die $j$-dimensionale Stiefel-Whitneysche Klasse bezeichnet (vgl. [*5*, Part II, §30.8]).

**2.2.** Für die Cohomologie wird ein fester Primkörper $\boldsymbol{Z}_q$ ($q$ beliebig) als Koeffizientenbereich verwandt. Gegeben sei ein reelles Vektorraum-Bündel $\xi$ mit Faser $\boldsymbol{R}^n$, Totalraum $E_\xi$, Basis $B_\xi$ und Projektion $\pi_\xi$. (Den Index $\xi$ werden wir häufig weglassen, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.) Den Verabredungen von 2.1 folgend wird für $q \neq 2$ vorausgesetzt, daß $\xi$ orientiert ist. $E_{\xi,0} = E_0$ bezeichnet wie bei MILNOR [*15*] die Menge der Punkte von $E$, die nicht gleich der 0 ihrer Faser sind. Es gibt eine kanonische Klasse $U \in H^n(E, E_0)$ (vgl. z.B. [*15*, Chap. VII, Theorem 10, und Chap. VII, Theorem 10′]) und den Thomschen (additiven) Isomorphismus

$$(1) \quad \begin{cases} \Phi : H^i(B) \to H^{i+n}(E, E_0), & \Phi(x) = \pi^* x \cup U, \quad x \in H^i(B), \\ \Phi : H^{**}(B) \to H^{**}(E, E_0), & \Phi(x) = \pi^{**} x \cup U, \quad x \in H^{**}(B). \end{cases}$$

Wenn $q \neq 0$, dann können wir einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ betrachten (1.1, 1.3). Wir setzen

$$\underline{\lambda}(\xi) = \Phi^{-1}(\lambda(U)) = \Phi^{-1}\lambda\,\Phi(1) \in H^{**}(B_\xi). \tag{2}$$

Wir haben damit eine Operation $\underline{\lambda}$ definiert, welche jedem Vektorraum-Bündel ein Element des Cohomologie-Ringes $H^{**}$ seiner Basis zuordnet. Um die Eigenschaften von $\underline{\lambda}$ besser formulieren zu können, führen wir folgende Definition ein.

**2.3.** Für die Cohomologie wird wieder ein fester Primkörper als Koeffizientenbereich verwandt. Wenn die Charakteristik verschieden von 2 ist, werden die Vektorraum-Bündel als orientiert vorausgesetzt.

Definition. *Eine Operation $\mu$, welche jedem Vektorraum-Bündel $\xi$ ein Element $\mu(\xi) \in H^{**}(B_\xi)$ zuordnet, dessen 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist, heißt multiplikativer Funktor, wenn gilt*

(i) *$\mu$ verhält sich natürlich bei Bündelabbildungen.*

(ii) *Für die Whitneysche Summe $\xi \oplus \eta$ zweier Vektorraum-Bündel $\xi, \eta$ mit $B_\xi = B_\eta$ ist*

$$\mu(\xi \oplus \eta) = \mu(\xi) \cdot \mu(\eta).$$

Mit $G^{**}(X)$ werde für $q = 2$ die Menge aller Elemente von $H^{**}(X)$ verstanden, deren 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist. Für $q \neq 2$ sei $G^{**}(X)$ dagegen die Menge aller Elemente von $H^{**}(X)$, deren 0-dimensionale Komponente gleich 1 ist und deren ungerade-dimensionale Komponenten verschwinden. In beiden Fällen ist $G^{**}(X)$ eine abelsche Gruppe bezüglich des Cup-Produkts.

Aus der Theorie der klassifizierenden Räume folgt, daß sich $\mu(\xi)$ für $q = 2$ durch die Stiefel-Whitneyschen Klassen und für $q \neq 2$ durch die Pontrjaginschen Klassen und die Eulersche Klasse ausdrücken läßt. Per definitionem ist $\mu(\xi) \in G^{**}(B_\xi)$ für $q = 2$. Aber auch für $q \neq 2$ ist dies richtig. Wie wir später sehen werden (2.5) kommt (für ungerades $q$) die Eulersche Klasse in Wirklichkeit nicht vor, so daß die von 0 verschiedenen Komponenten von $\mu(\xi)$ sogar durch 4 teilbare Dimension haben.

**2.4.** In 2.2 hatten wir einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ die Operation $\underline{\lambda}$ zugeordnet. Die 0-dimensionale Komponente von $\underline{\lambda}$ ist gleich 1, da $\lambda_0$ die Identität ist.

Satz. *Die Operation $\underline{\lambda}$ ist ein multiplikativer Funktor im Sinne der Definition* 2.3.

Der Beweis geht genauso wie bei Milnor [*15*, Chap. VII (Verification of axioms)]. Siehe insbesondere Milnors Theorem 11, das die Eigenschaft 2.3 (ii) für den Cohomologie-Automorphismus $Sq$ betrifft. Beim Beweis hat man 1.3 (iii) zu verwenden. Vorzeichenschwierigkeiten treten nicht auf, da $\underline{\lambda}(\xi)$ mit jedem Element von $H^{**}(B_\xi)$ vertauschbar ist.

**2.5.** Ein multiplikativer Funktor im Sinne von 2.3 ist für Charakteristik $q=2$ die totale Stiefel-Whitneysche Klasse $w=\sum_{i=0}^{\infty} w_i$ $(w_0=1, w_i\in H^i)$ und für Charakteristik $q\neq 2$ die totale Pontrjaginsche Klasse $p=\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ $(p_0=1, p_i\in H^{4i})$, s. [*11*, §4.5]. Es sei $\{K_j(w_1, \ldots, w_j)\}$ eine multiplikative Folge von Polynomen mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_2$ (s. [*11*, §1]). Die $w_i$ werden hier als Unbestimmte über $\boldsymbol{Z}_2$ betrachtet. Ordnet man dann jedem Vektorraum-Bündel $\xi$ das Element

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j\big(w_1(\xi), \ldots, w_j(\xi)\big)\in H^{**}(B_\xi) \tag{3}$$

zu, dann erhält man einen multiplikativen Funktor im Sinne von 2.3.

Ebenso liefert jede multiplikative Folge $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ von Polynomen mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$ $(q\neq 2)$ einen multiplikativen Funktor, indem man jedem orientierten Vektorraum-Bündel $\xi$ das Element

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j\big(p_1(\xi), \ldots, p_j(\xi)\big)\in H^{**}(B_\xi) \tag{4}$$

zuordnet.

*Wir werden zeigen, daß man auf diese Weise alle multiplikativen Funktoren erhält:*

Gegeben sei ein multiplikativer Funktor $\mu\,(q=2)$. Dann gibt es eine und nur eine Potenzreihe $Q(\mu, x)\in \boldsymbol{Z}_2[[x]]$, so daß $\mu(\xi)=Q\big(\mu, w_1(\xi)\big)$ für jedes Vektorraum-Bündel $\xi$ mit Faser $\boldsymbol{R}^1$. Dies ergibt sich mit Hilfe des universellen Bündels (Faser $\boldsymbol{R}^1$) über dem unendlich-dimensionalen reellen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R})$. Zu dieser Potenzreihe gehört nun eine multiplikative Folge von Polynomen [*1*, §1] und zu dieser nach (3) ein multiplikativer Funktor, der mit $\mu$ übereinstimmt. Diese Übereinstimmung ist klar für Vektorraum-Bündel, die Whitneysche Summe von Bündeln mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ sind, und deshalb für jedes Bündel $\xi$, da man zu $\xi$ (Faser $\boldsymbol{R}^n$) einen Raum $Y$ und eine stetige Abbildung $f: Y\to B_\xi$ finden kann, so daß $f^*\xi$ Whitneysche Summe von $n$ Bündeln mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ über $Y$ ist und daß $f^{**}: H^{**}(B_\xi)\to H^{**}(Y)$ injektiv ist. $Y$ ist der Totalraum des zu $\xi$ assoziierten Bündels mit $\boldsymbol{O}(n)/(\boldsymbol{Z}_2)^n$ als Faser [*5*, Part I, §9.2]. ($Y$ ist parakompakt als Faserbündel über einem parakompakten Raum mit kompakter Faser.)

Gegeben sei ein multiplikativer Funktor $\mu\,(q\neq 2)$. Dann gibt es eine und nur eine Potenzreihe $Q(\mu, z)\in \boldsymbol{Z}_q[[z]]$ mit $\mu(\xi)=Q\big(\mu, p_1(\xi)\big)$ für jedes orientierte Vektorraum-Bündel $\xi$ mit Faser $\boldsymbol{R}^2$. Dies ergibt sich, indem man beachtet, daß $\mu(\xi)=\mu(\xi\oplus\mathbf{1})$, wo $\mathbf{1}$ das triviale Vektorraum-Bündel mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ ist, und daß $H^{**}(B_{\boldsymbol{SO}(3)})=\boldsymbol{Z}_q[[p_1]]$. Zur Potenzreihe $Q(\mu, z)$ gehört eine multiplikative Folge von Polynomen und zu dieser nach (4) ein multiplikativer Funktor, der mit $\mu$ übereinstimmt. Diese Übereinstimmung ist zunächst klar für orientierte Vektorraum-Bündel, die Whitneysche Summe von orientierten Bündeln mit Faser $\boldsymbol{R}^2$ sind, und dann für jedes Bündel $\xi$, da man zu $\xi$ einen

Raum $Y$ und eine stetige Abbildung $f: Y \to B_\xi$ finden kann, so daß $f^*\xi$ Whitneysche Summe von orientierten Vektorraum-Bündeln mit Faser $\boldsymbol{R}^2$ und eventuell einem trivialen Bündel mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ ist und daß $f^{**}$ injektiv ist [5, Part I, §9.3].

**2.6.** Die Überlegungen von 2.5 haben gezeigt:

Satz. *Ordnet man jedem multiplikativen Funktor $\mu$* (s. 2.3) *die multiplikative Folge von Polynomen mit der charakteristischen Potenzreihe $Q(\mu, x) \in \mathbf{Z}_2[[x]]$ bzw. $Q(\mu, z) = \mathbf{Z}_q[[z]]$ $(q \neq 2)$ zu, dann erhält man eine eindeutige Korrespondenz zwischen den multiplikativen Funktoren und den multiplikativen Folgen von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$. Die Potenzreihe $Q(\mu, x)$ bzw. $Q(\mu, z)$ ist für $q = 2$ bestimmt durch:*

(5) $\mu(\xi) = Q(\mu, w_1(\xi))$ *für jedes Vektorraum-Bündel $\xi$ mit Faser $\boldsymbol{R}^1$*

*und für $q \neq 2$ durch*

(6) $\mu(\xi) = Q(\mu, p_1(\xi))$ *für jedes orientierte Vektorraum-Bündel mit Faser $\boldsymbol{R}^2$.*

*Schreibt man formal*

$$(7) \quad w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \cdots + w_n(\xi) = \prod_{j=1}^{N} (1 + x_j), \quad (N \text{ groß, } \dim x_j = 1),$$

*dann ist für $q = 2$*

$$(7') \qquad \mu(\xi) = \prod_{j=1}^{N} Q(\mu, x_j).$$

*Schreibt man formal*

$$(8) \qquad p(\xi) = \sum_{i=0}^{n} p_i(\xi) = \prod_{j=1}^{N} (1 + x_j^2), \quad (N \text{ groß, } \dim x_j = 2),$$

*dann ist für $q \neq 2$*

$$(8') \qquad \mu(\xi) = \prod_{j=1}^{N} Q(\mu, x_j^2).$$

Für einen Raum $X$ haben wir in [3] die abelsche Gruppe $K\boldsymbol{O}(X)$ definiert: Man betrachte alle Vektorraum-Bündel mit Basis $X$. (Die Vektorraum-Bündel brauchen nicht orientierbar zu sein; es wird an dieser Stelle auch zugelassen, daß das Vektorraum-Bündel über verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $X$ verschiedene Faserdimensionen hat.) $F(X)$ sei die freie abelsche Gruppe, die von den Isomorphieklassen aller dieser Vektorraum-Bündel erzeugt wird. Für jedes Tripel $t = (\xi, \xi', \xi'')$ von Isomorphieklassen mit $\xi = \xi' \oplus \xi''$ bilden wir das Element $[t] = \xi - \xi' - \xi'' \in F(X)$. Die Gruppe $K\boldsymbol{O}(X)$ ist definiert als die Quotientengruppe von $F(X)$ modulo der Untergruppe, die von allen Elementen der Form $[t]$ erzeugt wird. Für die Definition analoger Grothendieckscher Gruppen im Rahmen der algebraischen Geometrie siehe [6].

Lemma. *Der Primkörper $\mathbf{Z}_q$ diene als Koeffizientenbereich für die Cohomologie. Jeder multiplikative Funktor $\mu$ im Sinne von* 2.3 *induziert auf natürliche Weise einen Homomorphismus*

$$\mu: K\boldsymbol{O}(X) \to G^{**}(X) \subset H^{**}(X).$$

Beweis. Für $q=2$ ist dies klar: $\mu$ ist auf allen Erzeugenden von $F(X)$ definiert. (Zu jeder Erzeugenden $\xi$ gibt es eine Darstellung von $X$ als disjunkte Vereinigung offener und abgeschlossener Teilmengen $X_i$, so daß die Beschränkung $\xi_i$ von $\xi$ auf $X_i$ konstante Faserdimension hat. Dann ist $\mu(\xi)\in H^{**}(X)$ gleich dem „direkten Produkt" der $\mu(\xi_i)\in H^{**}(X_i)$.) Da $\mu(\xi)$ in der abelschen Gruppe $G^{**}(X)$ liegt, ist $\mu$ auf $F(X)$ wohldefiniert und, da es auf allen Elementen der Form $[t]$ gleich dem Einselement von $G^{**}(X)$ ist, auch auf $K\boldsymbol{O}(X)$.

Für ungerades $q$ ist $\mu$ nach den Verabredungen von 2.3 zunächst nur für orientierte Vektorraum-Bündel definiert. Da es sich jedoch durch die Pontrjaginschen Klassen ausdrücken läßt, die für nicht notwendigerweise orientierte Vektorraum-Bündel erklärt sind [*11*, §4.5], ist $\mu$ auch für nicht notwendigerweise orientierte Bündel und damit für die Erzeugenden von $F(X)$ definiert. $\mu$ ist gleich der 1 von $G^{**}(X)$ auf allen Elementen der Form $[t]\in F(X)$.

Jeder multiplikative Funktor $\mu$ ist durch eine multiplikative Folge $\{K_j(w_1,\ldots,w_j)\}$ bzw. $\{K_j(p_1,\ldots,p_j)\}$ bestimmt. Es sei nun $B_{\boldsymbol{O}}=\lim\limits_{n\to\infty} B_{\boldsymbol{O}(n)}$ der klassifizierende Raum der unendlich orthogonalen Gruppe. Es ist für $q=2$

$$H^{**}(B_{\boldsymbol{O}};\mathbf{Z}_2)=\mathbf{Z}_2[[w_1,w_2,\ldots]]$$

und für $q\neq 2$

$$H^{**}(B_{\boldsymbol{O}};\mathbf{Z}_q)=\mathbf{Z}_q[[p_1,p_2,\ldots]],$$

wo $w_i$ die universelle Stiefel-Whitneysche Klasse der Dimension $i$ und $p_i$ die universelle Pontrjaginsche Klasse der Dimension $4i$ ist. Der multiplikative Funktor $\mu$ ist durch das Element $\sum\limits_{j=0}^{\infty} K_j(w_1,\ldots,w_j)$ bzw. $\sum\limits_{j=0}^{\infty} K_j(p_1,\ldots,p_j)$ von $H^{**}(B_{\boldsymbol{O}};\mathbf{Z}_q)$ bestimmt. Wir werden deshalb gelegentlich einen multiplikativen Funktor $\mu$ einfach als Element von $H^{**}(B_{\boldsymbol{O}};\mathbf{Z}_q)$ ansehen und $\mu\in H^{**}(B_{\boldsymbol{O}};\mathbf{Z}_q)$ schreiben. Dieses Element von $H^{**}(B_{\boldsymbol{O}};\mathbf{Z}_q)$ ist gewissermaßen der Wert von $\mu$ auf dem stabilen universellen reellen Vektorraum-Bündel.

Ein multiplikativer Funktor $\mu: K\boldsymbol{O}(X)\to G^{**}(X)\subset H^{**}(X;\mathbf{Z}_q)$ ordnet auch jedem komplexen Vektorraum-Bündel $\xi$ über $X$ ein Element $\mu(\xi)\in G^{**}(X)$ zu, da $\xi$ als reelles Vektorraum-Bündel aufgefaßt werden kann. Ist $q\neq 2$, also $\mu$ gegeben durch eine multiplikative Folge $\{K_j(p_1,\ldots,p_j)\}$, dann ist $\mu(\xi)$ durch eine multiplikative Folge in den Chernschen Klassen von $\xi$ darstellbar, die man erhält, indem man in $K_j(p_1,\ldots,p_j)$ die Pontrjaginschen Klassen durch bekannte Polynome in den Chernschen Klassen ersetzt [*11*, §1.3]:

$$\mu(\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{K}_j\big(c_1(\xi),\ldots,c_j(\xi)\big)\qquad(\text{mit }\tilde{K}_{2i+1}=0).$$

Es sei nun $B_{\boldsymbol{U}}=\lim\limits_{n\to\infty} B_{\boldsymbol{U}(n)}$ der klassifizierende Raum der unendlichen unitären Gruppe. Es ist

$$H^{**}(B_{\boldsymbol{U}};\mathbf{Z}_q)=\mathbf{Z}_q[[c_1,c_2,\ldots]].$$

Wir können daher $\mu$ als Element von $H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \mathbf{Z}_q)$ auffassen. Auf Grund der natürlichen Inklusion $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{O}$ hat man den Homomorphismus

$$H^{**}(B_{\boldsymbol{O}}; Z_q) \to H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \mathbf{Z}_q),$$

der (für $q \neq 2$) injektiv ist und bei dem $\mu$ (aufgefaßt als Element von $H^{**}(B_{\boldsymbol{O}}; \mathbf{Z}_q)$) in $\mu$ (aufgefaßt als Element von $H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \mathbf{Z}_q)$) übergeht.

**2.7.** Satz. *Gegeben sei ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$. Zu $\lambda$ gehört eine Potenzreihe* (s. 1.6., (16), (17)). *Mit Hilfe von $\lambda$ definiert man für Vektorraum-Bündel den multiplikativen Funktor $\mu = \underline{\lambda}$, der nach (7′) bzw. (8′) mit Hilfe einer Potenzreihe berechnet werden kann. Es ist*

(9) $Q(\mu, x) = \lambda(x)/x$ *für* $q = 2$ *und* $Q(\mu, x^2) = \lambda(x)/x$ *für* $q$ ungerade.

Beweis für ungerades $q$. Die Gleichung (6) ist für ein orientiertes $\xi$ mit Faser $\boldsymbol{R}^2$ nachzuweisen. Nun ist $\Phi^{-1}(U \cup U)$ die Eulersche Klasse $e \in H^2(B_\xi)$. Wir betrachten die Injektion $i: E \to (E, E_0)$ (s. 2.2). Dann ist $i^* U = \pi^* e$ (s. [*15*, Chap. VIII, Theorem 12]) und deshalb

$$\Phi(e^{k-1}) = U^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Da $U$ Reduktion einer 2-dimensionalen ganzzahligen Klasse ist, wird $\lambda(U)$ durch die Potenzreihe $\lambda(x)$ gegeben, indem man $x$ durch $U$ ersetzt. Also entsteht wegen (10) das Element $\underline{\lambda}(\xi) = \Phi^{-1}\lambda(U)$ aus der Potenzreihe $\lambda(x)/x$, indem man $x$ durch $e$ ersetzt. Da $e^2 = p_1(\xi)$, ist der Beweis beendet. (Für $q = 2$ schließt man ähnlich. Man hat dann Bündel mit Faser $\boldsymbol{R}^1$ zu betrachten. Es gilt wieder eine Gleichung (10) mit $e = w_1(\xi)$.)

**2.8.** Es sei $\mu$ ein multiplikativer Funktor (2.3) und $\lambda$ ein Cohomologie-Automorphismus. Ordnet man dann jedem Vektorraum-Bündel $\xi$ das Element $\lambda(\mu(\xi)) \in H^{**}(B_\xi)$ zu, dann erhält man den multiplikativen Funktor $\lambda \circ \mu$, der wiederum mit Hilfe einer Potenzreihe berechnet werden kann (2.6.). Es folgt

$$Q(\lambda \circ \mu, x) = Q(\mu, \lambda(x)) \quad \text{für } q = 2 \tag{11}$$

und

$$Q(\lambda \circ \mu, x^2) = Q(\mu, \lambda(x)) \quad \text{für ungerades } q. \tag{11′}$$

Diese Formeln sind für das Folgende wichtig, wenn $\mu$ durch $\underline{\lambda}$ und $\lambda$ durch $\lambda^{-1}$ ersetzt wird. Den multiplikativen Funktor $\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Wu}(\lambda)$, siehe 2.11 Es gilt dann nach (9), (11) und (11′)

$$Q(\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}, x) = x/\lambda^{-1}(x) \quad \text{für } q = 2 \tag{12}$$

und

$$Q(\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}, x^2) = x/\lambda^{-1}(x) \quad \text{für ungerades } q. \tag{12′}$$

**2.9.** Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Satz von Riemann-Roch (Toddschen Polynomen) und Cohomologie-Operationen [*10*], den wir in dieser Arbeit genauer untersuchen wollen (vgl. Einleitung). Für diesen Zweck ist

das Verhalten der für die multiplikative Folge der Toddschen Polynome charakteristischen Potenzreihe $x/(1-e^{-x})$ modulo einer Primzahl $q$ von Bedeutung.

Lemma. *Ersetzt man in der Potenzreihe* $x/(1-e^{-x})$ *die Unbestimmte* $x$ *durch* $f\cdot x$ *mit* $f=q^{1/(q-1)}$ *($q$ Primzahl), so erhält man eine Potenzreihe in* $x$, *deren Koeffizienten von der Gestalt* $f^m\cdot r$ *sind, wo* $m$ *ganz und nicht negativ und* $r$ *eine rationale Zahl ist, deren Zähler und Nenner zu* $q$ *teilerfremd sind. Die Reduktion von* $f^m\cdot r$ modulo $q$ *ist per definitionem ein Element von* $\mathbf{Z}_q$, *das verschwindet, wenn* $m>0$. *Also ist die Reduktion* modulo $q$ *der Potenzreihe* $fx/(1-e^{-fx})$ *wohldefiniert. Es gilt mit* $f=q^{1/(q-1)}$

$$(13)\qquad fx/(1-e^{-fx}) \equiv 1+(x-x^q+x^{q^2}-\cdots+(-1)^j x^{q^j}+\cdots)^{q-1} \mod q.$$

Beweis. Der Exponent von $q$ in $k!$ ist kleiner oder gleich $\frac{k-1}{q-1}$ (vgl. z.B. [23, p. 99]). Er ist gleich diesem Quotienten dann und nur dann, wenn $k$ eine Potenz von $q$ ist. Wegen des Wilsonschen Satzes ist

$$(q^j)!/q^e \equiv (-1)^e \equiv (-1)^j \bmod q, \quad \text{wobei } e=(q^j-1)/(q-1).$$

Daraus folgt

$$(14)\qquad (1-e^{-fx})/fx \equiv \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j x^{q^j-1} \text{ modulo } q.$$

Bezeichnen wir die rechte Seite von (14) mit $G(x)$, dann bleibt zum Beweis von (13) nur zu zeigen, daß in $\mathbf{Z}_q[[x]]$

$$1/G(x)=1+\big(x\cdot G(x)\big)^{q-1} \quad \text{oder} \quad x=x\cdot G(x)+\big(x\cdot G(x)\big)^q.$$

Dies ist aber richtig, wegen $(a+b)^q=a^q+b^q$ modulo $q$.

Für eine *ungerade* Primzahl $q$ betrachteten wir weitere Potenzreihen, die im Sinne des Lemmas nach $q$ reduzierbar sind. Es gilt

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{fx}{\operatorname{tgh} fx} \equiv \dfrac{(fx)/2}{\sinh (fx)/2} \equiv fx/(1-e^{-fx}) \text{ modulo } q \\ \qquad (q \text{ ungerade Primzahl, } f=q^{1/(q-1)}). \end{cases}$$

Diese Kongruenzen folgen aus den Gleichungen

$$x+\frac{x}{\operatorname{tgh} x}=e^x\cdot\frac{x}{\sinh x}=2x/(1-e^{-2x})$$

unter Berücksichtigung von (13) und der Kongruenzen

$$fx\equiv 0 \bmod q, \qquad e^{fx}\equiv 1 \bmod q, \qquad 2^{q^j-1}\equiv 1 \bmod q.$$

**2.10.** Lemma. *Es sei* $\{K_j(c_1,\ldots,c_j)\}$ *die multiplikative Folge von Polynomen in den Unbestimmten* $c_i$ *mit Koeffizienten in* $\mathbf{Z}_q$ *und der charakteristischen Potenzreihe* $Q(x)\in\mathbf{Z}_q[[x]]$, *($q$ beliebige Primzahl). Es sei* $a$ *eine Potenz von* $q$. *Setzt man in* $K_{ja}$ *die Unbestimmte* $c_i$ *gleich* 0, *wenn* $i$ *nicht durch* $a$ *teilbar ist, dann erhält man ein Polynom* $K'_j(c_a, c_{2a}, \ldots, c_{ja})$. *Es ist*

$$K'_j(c_a, c_{2a}, \ldots, c_{ja}) = K_j(c_a, c_{2a}, \ldots, c_{ja}).$$

Beweis. Wir setzen $c_i' = c_{ia}$. Dann ist $\{K_i'\}$ die multiplikative Folge von Polynomen, die zur Potenzreihe $Q'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j'(1, 0, \ldots, 0)\, x^j$ gehört. Es ist [11, §1.2]

$$Q'(x^a) = K(1 + x^a) = K\big((1+x)^a\big) = \big(K(1+x)\big)^a = \big(Q(x)\big)^a = Q(x^a).$$

Also ist $Q'(x) = Q(x)$, was zu beweisen war.

**2.11.** Für einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ haben wir den multiplikativen Funktor $\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}$ mit $\mathrm{Wu}(\lambda)$ bezeichnet, da er, wie sich in §3 herausstellen wird, in speziellen Fällen von Wu Wen-Tsun betrachtet wurde. Für ein Vektorraum-Bündel $\xi$ schreiben wir statt $\mathrm{Wu}(\lambda)(\xi)$ auch $\mathrm{Wu}(\lambda, \xi)$. Wenn $\xi$ das Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ ist, dann setzen wir $\mathrm{Wu}(\lambda, M) = \mathrm{Wu}(\lambda, \xi)$. Wir untersuchen nun zunächst im Falle der Charakteristik $q = 2$ den multiplikativen Funktor $\mathrm{Wu}(Sq)$ (vgl. 1.1) und seinen Zusammenhang mit den Toddschen Polynomen $T_i(c_1, \ldots, c_i)$, vgl. [11, §1]. Nach Lemma 2.9 ist $2^i T_i(c_1, \ldots, c_i)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, deren Nenner den Faktor 2 nicht enthalten. Deshalb definiert $2^i T_i$ bei Reduktion mod 2 ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_2$.

Satz. *Für ein Vektorraum-Bündel $\xi$ gilt*

$$\mathrm{Wu}(Sq, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i T_i\big(w_1(\xi), \ldots, w_i(\xi)\big) \bmod 2. \tag{16}$$

*Wenn die Stiefel-Whitneyschen Klassen $w_{2j+1}(\xi)$ verschwinden, dann ist*

$$\mathrm{Wu}(Sq, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i T_i\big(w_2(\xi), \ldots, w_{2i}(\xi)\big) \bmod 2. \tag{17}$$

*Wenn das Vektorraum-Bündel $\xi$ eine schwache komplexe Struktur zuläßt* [5, Part III, §2], *dann sind seine Chernschen Klassen $c_i(\xi) \in H^{2i}(B_\xi; \mathbf{Z})$ definiert, und es gilt*

$$\mathrm{Wu}(Sq, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i T_i\big(c_1(\xi), \ldots, c_i(\xi)\big) \bmod 2. \tag{18}$$

Beweis. (17) ist wegen Lemma 2.10 (mit $q = a = 2$) eine Folgerung aus (16). Für ein Vektorraum-Bündel $\xi$ mit schwacher komplexer Struktur verschwinden die $w_{2j+1}(\xi)$ und außerdem ist $c_i(\xi) = w_{2i}(\xi) \bmod 2$. Deshalb ist (18) ein Korollar von (17). Zum Beweis von (16) ist wegen (12) und Lemma 2.9 nur zu zeigen, daß in $\mathbf{Z}_2[[x]]$ die Gleichung gilt

$$x / Sq^{-1} x = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} x^{2^j}, \tag{19}$$

wo $x$ als das von 0 verschiedene Element von $H^1\big(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{R}); \mathbf{Z}_2\big)$ gedeutet werden kann. Wegen $Sq\, x = x + x^2$ ist

$$x = Sq^{-1} x + (Sq^{-1} x)^2.$$

Macht man für $Sq^{-1}x$ den Ansatz von 1.6 (17), dann folgt aus vorstehender Gleichung, daß

$$Sq^{-1}x = x + x^2 + \cdots + x^{2^j} + \cdots$$

und damit (19).

Wir bemerken noch, daß die ungerade-dimensionalen Komponenten von $\mathrm{Wu}(Sq, \xi)$ verschwinden, wenn $a_1(\xi) = 0$, d.h. wenn $\xi$ orientierbar ist. Das liegt daran, daß das Polynom $T_{2j-1}(c_1, \ldots, c_{2j-1})$ durch $c_1$ teilbar ist [*11*, §1.7].

**2.12.** In Analogie zum vorhergehenden Abschnitt befassen wir uns nun für ungerade Charakteristik $q$ mit dem für orientierte Vektorraum-Bündel definierten multiplikativen Funktor $\mathrm{Wu}(\mathscr{P})$. Wir betrachten die multiplikativen Folgen $\{L_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ bzw. $\{\widehat{A}_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ mit den charakteristischen Potenzreihen $z^{\frac{1}{2}}/\mathrm{tgh}\, z^{\frac{1}{2}}$ bzw. $z^{\frac{1}{2}}/(2\sinh(z^{\frac{1}{2}}/2))$, vgl. [*11*, §1]. Das Polynom $\widehat{A}_j$ steht zu dem in [*11*, §1.6] definierten Polynom $A_j$ in der Beziehung $A_j = 2^{4j}\widehat{A}_j$. Nach Lemma 2.9 und (15) sind $f^{2j}L_j$ und $f^{2j}\widehat{A}_j$ (für $f = q^{1/(q-1)}$) Polynome, deren Koeffizienten die Gestalt $f^m \cdot r$ haben ($m$ ganz und nicht negativ; $r$ eine rationale Zahl, deren Zähler und Nenner zu $q$ teilerfremd sind). Die Polynome $f^{2j}L_j$ und $f^{2j}\widehat{A}_j$ verschwinden modulo $q$, wenn $2j$ nicht durch $q-1$ teilbar ist. $q^{2j(q-1)}L_j$ und $q^{2j(q-1)}\widehat{A}_j$ sind Polynome mit rationalen Koeffizienten, die ganz sind bezüglich $q$ (d.h. $q$ nicht im Nenner enthalten). Wenn $2j \equiv 0 \bmod q-1$, dann gilt

$$q^{2j/(q-1)}L_j \equiv q^{2j/(q-1)}\widehat{A}_j \equiv q^{2j/(q-1)}A_j \bmod q.$$

Satz. *Es sei $q$ eine ungerade Primzahl und $\mathscr{P}$ der Steenrodsche Cohomologie-Automorphismus* (vgl. 1.1) *für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$. Es sei $f = q^{1/(q-1)}$. Für ein orientiertes Vektorraum-Bündel $\xi$ gilt*

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Wu}(\mathscr{P}, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{2j} L_j\big(p_1(\xi), \ldots, p_j(\xi)\big) \\ \qquad\qquad = \sum_{j=0}^{\infty} f^{2j} \widehat{A}_j\big(p_1(\xi), \ldots, p_j(\xi)\big) \text{ modulo } q. \end{cases}$$

*Die $s$-dimensionale Komponente von* $\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, \xi)$ *verschwindet, wenn $s$ nicht durch $2(q-1)$ teilbar ist.*

Beweis. Zum Beweis von (20) ist wegen Lemma 2.9, (12′) und (15) nur zu zeigen, daß in $\mathbf{Z}_q[[x]]$ die Gleichung gilt

$$\text{(21)} \qquad x/\mathscr{P}^{-1}x = 1 + (x - x^q + x^{q^2} - \cdots + (-1)^j x^{q^j} + \cdots)^{q-1},$$

wo $x$ als ein von 0 verschiedenes Element von $H^2(\boldsymbol{P}_\infty(\boldsymbol{C}); \mathbf{Z}_q)$ gedeutet werden kann. Nun ist $\mathscr{P}x = x + x^q$ und deshalb

$$x = \mathscr{P}^{-1}x + (\mathscr{P}^{-1}x)^q.$$

Macht man für $\mathscr{P}^{-1}x$ den Ansatz von 1.6 (16), dann folgt aus vorstehender Gleichung sofort, daß

$$\mathscr{P}^{-1}x = x - x^q + x^{q^2} + \cdots (-1)^j x^{q^j} + \cdots \tag{21'}$$

und damit (21).

**2.13.** Es sei $q$ eine beliebige Primzahl und $f = q^{1/(q-1)}$. Nach Lemma 2.9 ist $f^j T_j(c_1, \ldots, c_j)$ ein Polynom, dessen Koeffizienten die Gestalt $f^m \cdot r$ haben ($m$ ganz und nicht negativ; $r$ eine rationale Zahl, deren Zähler und Nenner zu $q$ teilerfremd sind). $f^j T_j$ verschwindet modulo $q$, wenn $j$ nicht durch $q-1$ teilbar ist. $q^{[j/(q-1)]} T_j$ ist ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, die ganz sind bezüglich $q$. Faßt man $p_1, p_2, p_3, \ldots$ in bekannter Weise als Polynom in den Unbestimmten $c_1, c_2, \ldots$ auf [*11*, §1.3], dann gilt für eine *ungerade* Primzahl $q$

$$\sum_{j=0}^{\infty} f^j T_j(c_1, \ldots, c_j) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{2j} \hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j) \text{ modulo } q. \tag{22}$$

Dies folgt unmittelbar aus der zweiten Kongruenz von (15), vgl. auch [*11*, §1.7 (12)]. Aus (20) und (22) ergibt sich:

Satz. *Wenn das Vektorraum-Bündel $\xi$ eine schwache komplexe Struktur zuläßt* [*5*, Part III, §2] *und $c_i(\xi) \in H^{2i}(B_\xi; \mathbf{Z})$ die Chernschen Klassen sind, dann gilt für eine ungerade Primzahl $q$*

$$\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} f^j \cdot T_j\big(c_1(\xi), \ldots, c_j(\xi)\big) \text{ modulo } q. \tag{23}$$

**2.14. Bemerkung.** Für ein Vektorraum-Bündel $\xi$ (vgl. 2.2) und einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ kann man leicht nachweisen, daß $\underline{\lambda}(\xi) \in H^{**}(B_\xi)$ eine Invariante des stabilen Faser-Homotopie-Typs von $\xi$ ist (vgl. z. B. M. F. Atiyah, Thom complexes [Proc. Lond. Math. Soc. (3) **11**, 291–310 (1961)]). Für $q = 2$ erhält man mit Hilfe von $\lambda = Sq$, daß die totale Stiefel-Whitneysche Klasse $w(\xi)$ Invariante des stabilen Faser-Homotopie-Typs von $\xi$ ist. Für $q$ ungerade erhält man mit Hilfe von $\lambda = \mathscr{P}$, daß bei Anschreibung von $p(\xi)$ in der Form 2.6 (8) *die elementar-symmetrischen Funktionen in den $x_j^{q-1}$ Invarianten des stabilen Faser-Homotopie-Typs von $\xi$ sind (in der Cohomologie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$)*. Durch Verwendung eines allgemeinen $\lambda$ kommt man über dieses Resultat nicht hinaus, da $\lambda(x)/x$ eine Potenzreihe in $x^{q-1}$ ist. Auch die Anwendung irgendwelcher stabiler Cohomologie-Operationen auf die besprochenen Invarianten liefert nur Polynome in diesen Invarianten.

**2.15.** Lemma. *Wie in 2.2 sei $\xi$ ein reelles Vektorraum-Bündel. $\lambda$ sei ein Cohomologie-Automorphismus. Für $z \in H^{**}(B_\xi)$ gilt*

$$\Phi\big(\lambda(z) \cup \underline{\lambda}(\xi)\big) = \lambda\, \Phi(z). \tag{24}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \Phi\big(\lambda(z) \cup \underline{\lambda}(\xi)\big) &= \pi^{**}\lambda(z) \cup \pi^{**}\underline{\lambda}(\xi) \cup U \\ &= \lambda\, \pi^{**}(z) \cup \lambda\, U = \lambda(\pi^{**} z \cup U) = \lambda\, \Phi(z). \end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wurde 1.3 (iii) benutzt.

Wenn $\xi$ ein triviales Bündel ist, dann ist $\underline{\lambda}(\xi)=1$ und $\lambda$ und $\Phi$ sind in diesem Spezialfall vertauschbar. Dies entspricht der Vertauschbarkeit von $\lambda$ mit $E$ (vgl. 1.3). Im allgemeinen sind $\lambda$ und $\Phi$ nicht vertauschbar. Man hat den „Multiplikator" $\underline{\lambda}(\xi)$, der im nächsten Paragraphen eine wesentliche Rolle spielen wird.

Das Lemma gilt natürlich auch für komplexe Vektorraum-Bündel. Man fasse diese einfach als reelle Bündel auf.

## § 3. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

**3.1.** Ein Cohomologie-Automorphismus $\lambda: H^{**}(X; \mathbf{Z}_q) \to H^{**}(X; \mathbf{Z}_q)$ kann nach 1.3 angesehen werden als eine natürliche Transformation der singulären Cohomologie-Theorie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ in sich. $\lambda$ respektiert die multiplikative Struktur. Die Graduierung wird jedoch vernachlässigt. Die Primzahl $q$ ist im folgenden immer festgewählt. Deshalb wird wieder das Symbol $\mathbf{Z}_q$ bei der Anschreibung der Cohomologie-Gruppen weggelassen. Alle Mannigfaltigkeiten werden als kompakt und differenzierbar vorausgesetzt. Für ungerades $q$ wird überdies angenommen, daß sie orientiert sind.

Es sei $X$ eine Mannigfaltigkeit. Dann hat man den kanonischen Poincaréschen Isomorphismus

$$D_X: H^*(X) \to H_*(X), \tag{1}$$

zu dessen Definition man für ungerades $q$ die Orientierung von $X$ benötigt. Wenn $n$ die Dimension von $X$ ist, dann ist $D_X$ folgendermaßen definiert:

$$D_X(a) = a \cap h, \tag{2}$$

wo $h \in H_n(X)$ für ungerades $q$ durch die Orientierung von $X$ bestimmt ist. Für $q=2$ ist $h$ direkte Summe der $h_i$, wo $h_i$ das von 0 verschiedene Element von $H^n(X_i)$ ist und $X_i$ die endlich vielen Zusammenhangskomponenten von $X$ durchläuft. Für eine stetige Abbildung $f: Y \to X$ von Mannigfaltigkeiten hat man den Gysinschen Homomorphismus

$$f_*: H^*(Y) \to H^*(X), \qquad f_* = D_X^{-1} \circ f_\# \circ D_Y, \tag{3}$$

wo $f_\#: H_*(Y) \to H_*(X)$ der durch $f$ induzierte Homomorphismus der Homologiegruppen ist. Für $f: Y \to X$ sind also die beiden Homomorphismen

$$f^*: H^*(X) \to H^*(Y), \qquad f_*: H^*(Y) \to H^*(X), \tag{4}$$

definiert. $f^*$ ist ein Ring-Homomorphismus, $f_*$ ein additiver Homomorphismus. Sie genügen folgender Beziehung

$$f_*(f^* x \cup y) = x \cup f_*(y), \qquad x \in H^*(X), \qquad y \in H^*(Y). \tag{5}$$

Faßt man $H^*(X)$ und $H^*(Y)$ (vermöge $f^*$) als $H^*(X)$-Moduln auf, dann besagt (5), daß $f_*$ ein Homomorphismus von $H^*(X)$-Moduln ist. (5) folgt mit Hilfe von (2) aus der analogen Eigenschaft von $f_\#$: Man beachte, daß $H_*(X)$ und $H_*(Y)$ beide wegen des cap-Produkts $H^*(X)$-Moduln sind. (Für $H_*(Y)$ benutzt man $f^*$.)

Der Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ ist mit $f^*$ vertauschbar, jedoch im allgemeinen nicht mit $f_*$. Es gilt aber folgender Satz.

**3.2.** Satz. *Es sei $\lambda$ ein Cohomologie-Automorphismus. Für Mannigfaltigkeiten $X$ ist dann das Element* $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, X) \in H^*(X)$ *wohldefiniert* (2.11). *Es sei $f: Y \to X$ eine stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Dann ist*

$$f_*\big(\lambda y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, Y)\big) = \lambda f_* y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, X) \quad \text{für } y \in H^*(Y). \tag{6}$$

**3.3.** Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, sei auf seine Ähnlichkeit mit dem differenzierbaren Riemann-Rochschen Satz hingewiesen [3]. An Stelle von $\lambda$ hat man dort den Chernschen Charakter, der eine natürliche Transformation des Funktors $K^*(X)$ in $H^{**}(X; \boldsymbol{Q})$ liefert [4]. Man hat für eine stetige Abbildung $f: Y \to X$ von orientierten Mannigfaltigkeiten den Homomorphismus $f_*: H^*(Y; \boldsymbol{Q}) \to H^*(X; \boldsymbol{Q})$ und unter besonderen Voraussetzungen den recht schwierig zu definierenden Homomorphismus $f_!: K^*(Y) \to K^*(X)$. Immer wenn man eine natürliche Transformation von einer „Cohomologie-Theorie" (eventuell ohne Dimensionsaxiom) in eine andere hat, kann man nach einem Riemann-Rochschen Satz vom Typ 3.2 fragen. Beide Theorien sollten ein Analogon zur Poincaréschen Dualität erfüllen, damit in beiden Cohomologie-Theorien für stetige Abbildungen von Mannigfaltigkeiten die kovarianten Homomorphismen vorhanden sind, um deren Verträglichkeit (bzw. gerade Nicht-Verträglichkeit) mit der gegebenen natürlichen Transformation es sich ja handelt. Vielleicht werden wir an anderer Stelle auf dieses allgemeine Prinzip eingehen, das uns durch den Satz von Riemann-Roch im Sinne von Grothendieck [6] nahegelegt wurde. Der Satz 3.2 stellt jedenfalls das einfachste Beispiel für Sätze dieses Typs dar, weil es sich um die gewöhnliche Cohomologie-Theorie und eine natürliche Transformation dieser Theorie in sich handelt.

**3.4.** Beweis von Satz 3.2. Das tangentielle Vektorraum-Bündel von $X$ bzw. $Y$ werde mit $\xi$ bzw. $\eta$ bezeichnet. Für $f: Y \to X$ betrachten wir das Element $\eta - f^*\xi \in K\boldsymbol{O}(Y)$ (s. 2.6), bezeichnen es mit $tf$ oder $t(f)$ und nennen es das Tangentialbündel von $f$. Wenn $f$ die Abbildung von $Y$ auf einen Punkt $X = \{x_0\}$ ist, dann ist das Tangentialbündel von $f$ gleich dem Tangentialbündel von $Y$ (aufgefaßt als Element von $K\boldsymbol{O}(Y)$). $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$ ist ein multiplikativer Funktor im Sinne von 2.3, den wir für die Dauer des Beweises mit $\mu$ bezeichnen wollen. Die zu beweisende Gleichung (6) kann wegen (5) auch so geschrieben werden:

$$f_*\big(\lambda y \cdot \mu(tf)\big) = \lambda f_* y, \quad y \in H^*(Y). \tag{7}$$

Es gilt nämlich

$$f_*\big(\lambda y \cdot \mu(\eta)\big) \cdot \mu(\xi)^{-1} = f_*\big(\lambda y \cdot \mu(\eta) \cdot \mu(f^*\xi)^{-1}\big) = f_*\big(\lambda y \cdot \mu(tf)\big).$$

Für Abbildungen $g: Z \to Y$, $f: Y \to X$ von Mannigfaltigkeiten $Z$, $Y$, $X$, deren Tangentialbündel mit $\zeta, \eta, \xi$ bezeichnet werden sollen, ist

$$t(f \circ g) = \zeta - (f \circ g)^*\xi = g^*(\eta - f^*\xi) + \zeta - g^*(\eta) = g^* t(f) + t(g). \tag{8}$$

LEMMA. *Wenn (7) für $f$ und $g$ richtig ist, dann auch für $f \circ g$.*

BEWEIS. Es sei $z \in H^*(Z)$. Dann gilt nach (8)

$$(f \circ g)_* \big(\lambda z \cdot \mu(t(f \circ g))\big) = f_* g_* \big(\lambda z \cdot g^* \mu(t f) \cdot \mu(t g)\big).$$

Aus (5) und der Gleichung (7) für $g$ folgt

$$f_* g_* \big(\lambda z \cdot g^* \mu(t f) \cdot \mu(t g)\big) = f_* \big(g_* (\lambda z \cdot \mu(t g)) \cdot \mu(t f)\big) = f_* \big(\lambda g_* z \cdot \mu(t f)\big).$$

Gleichung (7) für $f$ ergibt: $f_* \big(\lambda g_* z \cdot \mu(t f)\big) = \lambda f_* g_* z = \lambda (f \circ g)_* z$ und damit

$$(f \circ g)_* \big(\lambda z \cdot \mu(t(f \circ g))\big) = \lambda (f \circ g)_* z, \qquad \text{d.h. (7) für } f \circ g.$$

Als nächstes bemerken wir, daß es genügt (7) für differenzierbare Abbildungen zu beweisen, da jede stetige Abbildung $f: Y \to X$ einer differenzierbaren homotop ist. Jede differenzierbare Abbildung $f: Y \to X$ läßt sich in eine differenzierbare Einbettung und eine Projektion mit einer Sphäre als Faser aufspalten: Es sei $i$ eine Einbettung von $Y$ in eine Sphäre $\boldsymbol{S}^m$ geeigneter Dimension $m$. Dann ist $(f, i)$ eine Einbettung $j$ von $Y$ in $X \times \boldsymbol{S}^m$:

$$j = (f, i) : Y \to X \times \boldsymbol{S}^m, \qquad j(y) = \big(f(y), i(y)\big).$$

$\pi_1$ sei die Projektion von $X \times \boldsymbol{S}^m$ auf $X$, dann ist $f = \pi_1 \circ j$. Wegen des Lemmas braucht (7) nur für Einbettungen und für die Projektion $\pi_1: X \times \boldsymbol{S}^m \to X$ bewiesen zu werden. Wir untersuchen zunächst den Fall der Projektion. Es sei $\pi_2$ die Projektion von $X \times \boldsymbol{S}^m \to \boldsymbol{S}^m$, ferner $\sigma$ das Tangentialbündel von $\boldsymbol{S}^m$ und $\xi$ das von $X$. Es ist

$$t(\pi_1) = \pi_1^* \xi + \pi_2^* \sigma - \pi_1^* \xi = \pi_2^* \sigma. \tag{9}$$

Nun repräsentiert $\sigma$ in $K\boldsymbol{O}(\boldsymbol{S}^m)$ das Element $m \cdot 1$. Deshalb ist $\mu(\sigma) = 1$ und ebenfalls $\mu\big(t(\pi_1)\big) = 1$. Also besagt (7) für $f = \pi_1$

$$(\pi_1)_* \lambda y = \lambda (\pi_1)_* y, \qquad y \in H^*(X \times \boldsymbol{S}^m). \tag{10}$$

Es sei $g$ das zur Orientierung von $\boldsymbol{S}^m$ gehörige erzeugende Element von $H^m(\boldsymbol{S}^m)$. Jedes Element $y$ von $H^*(X \times \boldsymbol{S}^m)$ läßt sich dann auf eine und nur eine Weise in der Form $\pi_1^* a + (\pi_1^* b) \cdot (\pi_2^* g)$ schreiben $\big(a, b \in H^*(X)\big)$ und es ist $(\pi_1)_* y = b$. Da $\lambda y = \pi_1^* \lambda a + (\pi_1^* \lambda b)(\pi_2^* g)$ wegen $\lambda g = g$, folgt sofort (10). — Wir kommen nun zum Beweis von (7) für den Fall einer Einbettung. $Y$ sei also eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X$ und $f: Y \to X$ die Injektion. Es sei $\nu$ das Normalbündel von $Y$ in $X$, dann gilt in $K\boldsymbol{O}(Y)$

$$t(f) = -\nu. \tag{11}$$

Es sei $E$ der Totalraum des Vektorraum-Bündels $\nu$. Mit Hilfe einer schlauchartigen Umgebung von $Y$ in $X$ (tubular neighborhood), die zu einer Umgebung des Nullschnittes von $\nu$ in $E$ homöomorph ist, konstruiert man durch geeignete Ausschneidung einen Isomorphismus

$$\varepsilon: H^*(E, E_0) \to H^*(X, X - Y).$$

Ferner hat man den kanonischen Homomorphismus

$$\varrho : H^*(X, X - Y) \to H^*(X).$$

In 2.2 wurde der Homomorphismus $\Phi$ betrachtet:

$$\Phi : H^*(Y) \to H^*(E, E_0),$$

der im Falle ungerader Charakteristik erst definiert ist, nachdem man dem Normalbündel eine Orientierung gegeben hat. Man kann bekanntlich $\nu$ so orientieren, daß

$$f_* = \varrho \circ \varepsilon \circ \Phi. \tag{12}$$

Da der Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ mit $\varrho$ und $\varepsilon$ vertauschbar ist, ergibt sich

$$\lambda f_* y = \varrho\, \varepsilon\, \lambda\, \Phi\, y, \qquad y \in H^*(Y). \tag{13}$$

Aus 2.15 folgt nun unter Verwendung von (11) und (12), daß

$$\lambda f_* y = \varrho\, \varepsilon\, \Phi(\lambda y \cdot \underline{\lambda} \nu) = f_*\big(\lambda y \cdot (\underline{\lambda}(t f))^{-1}\big). \tag{14}$$

Bisher wurde im Beweis nicht verwendet, daß $\mu$ in (7) gleich $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$. Damit (14) in (7) übergeht, muß dies jetzt verwendet werden. Nun ist aber $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$ der multiplikative Funktor, welcher jedem Vektorraum-Bündel $\xi$ die Cohomologie-Klasse $(\underline{\lambda}\xi)^{-1}$ zuordnet, da $(\lambda x/x)^{-1} = x/(\lambda^{-1})^{-1} x$ (vgl. 2.7 (9) und 2.8 (12), (12′)).

Der Beweis des Satzes 3.2 verlief analog zum Beweis des differenzierbaren Riemann-Rochschen Satzes [*13*].

**3.5.** Wir wollen Satz 3.2 jetzt auf den Fall anwenden, daß $X$ der einpunktige Raum $X = \{x_0\}$ und $f$ die konstante Abbildung ist. In diesem Fall ist natürlich $\mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, X) = 1$. Da $\lambda$ auf der Cohomologie des Punktes die Identität ist, geht die rechte Seite von (6) in $f_* y$ über. Für jedes $y \in H^*(Y)$ ist aber

$$f_* y = y[Y] \cdot 1, \qquad 1 \in H^0(X), \tag{15}$$

wo $y[Y]$ den Wert von $y$ auf dem (eventuell orientierten) Grundzyklus von $Y$ andeutet. Dabei nehmen alle Komponenten von $y$, deren Dimension nicht gleich der von $Y$ ist, den Wert 0 an. Satz 3.2 geht also in dem von uns betrachteten Spezialfall über in

$$\big(\lambda y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda^{-1}, Y)\big)[Y] = y[Y]. \tag{16}$$

Ersetzt man in (16) zunächst $\lambda$ durch $\lambda^{-1}$ und dann $y$ durch $\lambda y$, dann folgt

$$(\lambda y)[Y] = \big(y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda, Y)\big)[Y], \qquad y \in H^*(Y). \tag{17}$$

Die Formel (17) motiviert, warum wir den multiplikativen Funktor $\lambda^{-1} \circ \underline{\lambda}$ mit $\mathrm{Wu}(\lambda)$ bezeichnet haben (2.11). Die Formel (17) stammt nämlich für $\lambda = Sq$ oder $\lambda = \mathscr{P}$ von Wu Wen-Tsun [*25, 26*], der sie allerdings mit der Diagonalmethode bewiesen hat, auf die auch Adams [*1*] zurückgreift und auf

die ebenfalls in [*10*] Bezug genommen wurde, während wir die differenzierbare Einbettung von $Y$ in eine Sphäre und das entsprechende Normalbündel benutzt haben. Die Cohomologie-Klasse $\mathrm{Wu}(\lambda, Y)$ läßt sich mit Hilfe der Stiefel-Whitneyschen bzw. der Pontrjaginschen Klassen von $Y$ ausdrücken (Satz 2.6 und 2.8 (12), (12′)). Für $\lambda = Sq$ oder $\lambda = \mathscr{P}$ steht $\mathrm{Wu}(\lambda, Y)$ in enger Beziehung zu den Toddschen Polynomen $T_i(w_1(Y), \ldots, w_i(Y))$ bzw. den $L$-Polynomen $L_j(p_1(Y), \ldots, p_j(Y))$. Die Einzelheiten sind aus den Sätzen 2.11, 2.12, 2.13 zu entnehmen. Die in [*10*] ohne ausführlichen Beweis angegebenen Theoreme 2.1 bis 2.4 sind also in der vorliegenden Arbeit vollständig bewiesen.

**3.6.** Aus (17) folgen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen bzw. den Pontrjaginschen Zahlen einer Mannigfaltigkeit, wenn man für $\lambda$ beliebige Cohomologie-Automorphismen einsetzt und $y$ Polynome in den Stiefel-Whitneyschen bzw. den Pontrjaginschen Klassen der Mannigfaltigkeit durchläuft. In §5 werden wir sehen, daß sich diese Relationen bereits erhalten lassen, wenn man (17) nur für $\lambda = Sq$ bzw. $\lambda = \mathscr{P}$ anwendet. Für die praktische Rechnung ist es jedoch bequemer, beliebige Cohomologie-Automorphismen heranzuziehen. Setzt man in (17) für $y$ das Einselement von $H^*(Y)$, dann ergibt sich

Satz. *Es sei $\lambda$ ein Cohomologie-Automorphismus für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$ ($q$ beliebige Primzahl). Dann gilt für eine kompakte differenzierbare positiv-dimensionale Mannigfaltigkeit $Y$, die für ungerades $q$ unseren Verabredungen gemäß als orientiert vorausgesetzt wird,*

$$\mathrm{Wu}(\lambda, Y)\,[Y] = 0. \tag{18}$$

Für eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit $M$ der Dimension $4k$ spielt in der Cobordisme-Theorie die ganze Zahl $s(M)$ eine Rolle (vgl. z.B. [*11*, §6.3]). Schreibt man die *ganzzahligen* Pontrjaginschen Klassen $p_i(M)$ formal in der Gestalt 2.6 (8), dann ist

$$s(M) = \Big(\sum_{j=1}^{N} x_j^{2k}\Big)\,[M].$$

Wir geben nun einen direkten Beweis für einen Satz von Milnor [*17*], den Milnor auf dem Wege über Untersuchungen der Cobordisme-Algebra erhalten hat.

Satz. *Es sei $M$ eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $4k$. Wenn $2k+1$ eine Potenz der Primzahl $q$ ist, dann ist $s(M)$ durch $q$ teilbar.*

Beweis. Wir setzen für den Moment $a = 2k+1$. Die Zahl $a$ ist eine Potenz der ungeraden Primzahl $q$. Nach Satz 1.8 gibt es einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_q$, für den $\lambda^{-1}x = x - x^a$. Dann ist

$$x/\lambda^{-1}x = 1 + x^{a-1} + \cdots + x^{j(a-1)} + \cdots.$$

Schreibt man nun in der Cohomologie mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$ die Pontrjaginsche Klasse formal in der Gestalt 2.6 (8), dann gilt (2.8 (12′))

$$\mathrm{Wu}(\lambda, M) = \prod_{j=1}^{N} x_j / \lambda^{-1} x_j .$$

Da $a - 1 = 2k = \dim(M)/2$, ist $\mathrm{Wu}(\lambda, M)[M] = s(M) \bmod q$. Das beendet den Beweis wegen (18).

**3.7.** In [*11*, §1.7] wurde ohne Beweis folgendes Lemma angegeben.

Lemma. *Das Toddsche Polynom kann in eindeutiger Weise als Polynom mit ganzzahligen teilerfremden Koeffizienten dividiert durch eine positive ganze Zahl $\mu(T_k)$ geschrieben werden. Man hat*

(19) $\mu(T_k) = \prod q^{[k/(q-1)]}$ (Produkt über alle Primzahlen $q$ mit $2 \leqq q \leqq k+1$).

Wir tragen den Beweis hier nach. Abgesehen von der expliziten Formel (19) ist die Behauptung klar, da $T_k$ für $c_i = \binom{k+1}{i}$ den Wert 1 annimmt. Man beweist zunächst, daß $\mu(T_{k+1})$ ein Vielfaches von $\mu(T_k)$ ist. Dazu betrachtet man den Ring $\boldsymbol{Q}[c_1, d_1, c_2, c_3, \ldots]$ modulo dem von $d_1^2$ und den Monomen in den $c_i$ vom Gewichte größer als $k$ erzeugten Ideal $J$. Definiert man $c_i'$ durch

$$1 + c_1' x + c_2' x^2 + \cdots = (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)(1 + 2 d_1 x),$$

dann ist wegen der Multiplikativität der Folge $\{T_j\}$ und wegen $T_1(c_1) = \frac{c_1}{2}$

$$T_{k+1}(c_1', \ldots, c_{k+1}') \equiv d_1 \cdot T_k(c_1, \ldots, c_k) \text{ modulo } J .$$

Daraus folgt in der Tat $\mu(T_{k-1}) \cdot 0 \bmod \mu(T_k)$. Nach den Bemerkungen über $f^j T_j$ zu Anfang von 2.13 genügt es zum Beweis von (19) zu zeigen, daß $f^j T_j \not\equiv 0 \bmod q$ für $j \equiv 0 \bmod q-1$. Es sei $j = r(q-1)$. Im komplexen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_{rq}(\boldsymbol{C})$ mit $x \in H^2(\boldsymbol{P}_{rq}(\boldsymbol{C}); \boldsymbol{Z}_q)$ und $x \neq 0$ ist $\mathscr{P}(x^r) = x^r (1 + x^{q-1})^r$ und deshalb

$$\mathscr{P}(x^r)[\boldsymbol{P}_{qr}(\boldsymbol{C})] \neq 0 .$$

(Für $q = 2$ setze man $\mathscr{P} = Sq$). Also ist die $2r(q-1)$-dimensionale Komponente von $\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, \boldsymbol{P}_{qr}(\boldsymbol{C}))$ nicht null (3.5 (17)) und deshalb ist $q^r T_{r(q-1)} \not\equiv 0 \bmod q$ (s. 2.13 (23) und 2.11 (18)). Ebenso beweist man entsprechende Aussagen über die Polynome $L_k$ und $A_k$ (s. [*11*, §1.5 und 1.6]).

**3.8.** Wir beschließen diesen Paragraphen mit Bemerkungen über kompakte nicht notwendigerweise differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Sei $M$ eine solche Mannigfaltigkeit. $\lambda$ sei ein Cohomologie-Automorphismus für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_2$. Wegen des Poincaréschen Dualitätssatzes gibt es dann genau ein Element $u$ von $H^*(M)$, so daß

(20) $(\lambda y)[M] = (y \cdot u)[M]$ für alle $y \in H^*(M)$.

Wir bezeichnen $u$ mit $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$. Wegen 3.5 (17) stimmt dies mit unseren für differenzierbare Mannigfaltigkeiten eingeführten Bezeichnungen überein.

FRAGE. *Gilt unter der oben angegebenen Definition von* $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$ *der Satz* 3.2 *für stetige Abbildungen* $Y \to X$ *kompakter nicht notwendigerweise differenzierbarer Mannigfaltigkeiten?*

Für die Cohomologie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ ($q$ ungerade Primzahl) und für *orientierte* Mannigfaltigkeiten kann man ebenso die Klasse $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$ einführen und die analoge Frage stellen.

Wir stellen noch fest, daß $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$ per definitionem (20) eine Invariante des Homotopietyps von $M$ ist, ebenso natürlich $\lambda(\mathrm{Wu}(\lambda, M))$. Für differenzierbares $X$ ist $\lambda(\mathrm{Wu}(\lambda, X)) = \underline{\lambda}(\xi)$, wo $\xi$ das Tangentialbündel von $X$ ist. Die Homotopieinvarianz von $\underline{\lambda}(\xi)$ (oder gleichwertig von $\mathrm{Wu}(\lambda, X)$) innerhalb der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten folgt auch aus 2.14 und der Tatsache, daß homotopie-äquivalente differenzierbare Mannigfaltigkeiten Tangentialbündel haben, die vom gleichen stabilen Faser-Homotopie-Typ sind (M. F. ATIYAH, Thom complexes (loc. cit. in 2.14), Theorem 3.6).

Legen wir nochmals $\mathbf{Z}_2$ als Koeffizientenbereich zugrunde. Für eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit $X$ ist $Sq(\mathrm{Wu}(Sq, X))$ gleich der totalen Stiefel-Whitneyschen Klasse von $X$. Für eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit $M$ kann die Stiefel-Whitneysche Klasse $w_i(M)$ durch die Gleichung

$$w(M) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(M) = Sq((\mathrm{Wu}(Sq, M))$$

definiert werden. $w_i(M)$ ist eine Homotopieinvariante. Für eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit $X$ ist $\mathrm{Wu}(\lambda, X)$ nach 2.8 ein gewisses Polynom in den $w_i(X)$. Es entsteht die Frage, ob sich $\mathrm{Wu}(\lambda, M)$ für eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit $M$ durch das gleiche Polynom mittels der $w_i(M)$ ausdrücken läßt. Diese Frage wurde von ADAMS [1] bejaht.

Analoges gilt für ungerades $q$. Statt $Sq$ wählt man $\mathscr{P}$, und an Stelle der Stiefel-Whitneyschen Klassen treten die elementar-symmetrischen Funktionen in den $x_j^{q-1}$ (s. 2.14).

## § 4. Der Satz von Adams

**4.1.** Es sei $X$ ein endlicher $CW$-Komplex, *dessen ganzzahlige Cohomologie keine Torsion habe.* $H^*(X; \mathbf{Z})$ läßt sich dann vermöge des Koeffizienten-Homomorphismus $\mathbf{Z} \to \boldsymbol{Q}$ als Unterring von $H^*(X; \boldsymbol{Q})$ auffassen. Ein Element von $H^*(X; \boldsymbol{Q})$ heißt ganz, wenn es zu $H^*(X; \mathbf{Z})$ gehört. Ein Element $a$ von $H^*(X; \boldsymbol{Q})$ heißt ganz bezüglich der Primzahl $q$, wenn es eine ganze zu $q$ teilerfremde Zahl $m$ gibt, so daß $ma$ ganz ist. Der Homomorphismus

$$\varrho_q : H^*(X; \mathbf{Z}) \to H^*(X; \mathbf{Z}_q)$$

sei induziert durch $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_q$. Dieser Homomorphismus kann erweitert werden auf den Unterring der bezüglich $q$ ganzen Elemente von $H^*(X; \boldsymbol{Q})$: Für $a \in H^*(X; \boldsymbol{Q})$, das ganz bezüglich $q$ ist, definiert man $\varrho_q(a) \in H^*(X; \boldsymbol{Q})$ durch

die Gleichung

$$\varrho_q(a) = m^{-1} \cdot \varrho_q(m\,a), \qquad (m, q) = 1, \quad m\,a \text{ ganz.} \tag{1}$$

$\varrho_q(a)$ hängt nicht von der Wahl von $m$ ab. (In (1) ist $m^{-1}$ natürlich im Körper $\boldsymbol{Z}_q$ zu berechnen.)

Für $X$ ist der Ring $K^*(X)$ definiert [4], der über $\boldsymbol{Z}_2$ graduiert ist:

$$K^*(X) = K^0(X) + K^1(X). \tag{2}$$

$K^0(X) = K(X)$ wird mit Hilfe der komplexen Vektorraum-Bündel mit der Basis $X$ auf die Weise eingeführt, an die wir für reelle Vektorraum-Bündel in 2.6 erinnert hatten. Der Chernsche Charakter ist ein Ring-Homomorphismus

$$ch\colon K^*(X) \to H^*(X; \boldsymbol{Q}), \quad \text{s. [4].}$$

Wegen unserer Voraussetzung, daß $X$ torsionsfrei ist, existiert zu jedem Element $a \in H^n(X; \boldsymbol{Z})$ ein Element $\xi \in K^*(X)$, dessen Chernscher Charakter mit $a$ beginnt, d.h.

$$ch(\xi) = a + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+2k}, \qquad a_{n+2k} \in H^{n+2k}(X; \boldsymbol{Q}). \tag{3}$$

Die Elemente $a_{n+2k}$ hängen im allgemeinen nicht nur von $a$ sondern auch von der Wahl von $\xi$ ab. Der folgende Satz von Adams [2] zeigt, daß in gewisser Weise die Reduktion der $a_{n+2k}$ modulo $q$ invariant ist.

**4.2.** Satz (Adams). *Es sei $X$ ein endlicher CW-Komplex, dessen ganzzahlige Cohomologie keine Torsion habe. $\xi$ sei Element von $K^*(X)$, dessen Chernscher Charakter von der Form (3) ist $(a \in H^n(X; \boldsymbol{Z}))$. Dann ist $a_{n-2k} \cdot q^{[k/(q-1)]}$ (für eine beliebige Primzahl $q$) ganz bezüglich $q$. Wenn $k$ nicht durch $q-1$ teilbar ist, und also $k/(q-1) > [k/(q-1)]$ ist, dann werde das Element $a_{n+2k} \cdot q^{k/(q-1)}$ von $H^{n+2k}(X; \boldsymbol{R})$ betrachtet und $\varrho_q$ von diesem Element gleich 0 gesetzt. Damit ist $\varrho_q(a_{n+2k} \cdot q^{k/(q-1)})$ für jedes $k$ definiert. Es gilt*

$$\begin{cases} \varrho_q\left(a + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+2k} \cdot q^{k/(q-1)}\right) = \mathscr{P}^{-1}(\varrho_q a), & \text{wenn } q \text{ ungerade,} \\ \qquad\qquad = Sq^{-1}(\varrho_q a), & \text{wenn } q = 2. \end{cases} \tag{4}$$

Dieser Satz ist spezieller als das Theorem 2 von Adams [2], da wir uns auf torsionsfreie $CW$-Komplexe $X$ eingeschränkt haben. Adams betrachtet nur $K^0(X)$, aber das genügt, um den Satz für $K^*(X)$ zu bekommen: Unter Verwendung der Bezeichnungen von [4] hat man nämlich die kanonischen „Einhängungs"-Isomorphismen

$$K^1(X) = \tilde{K}^0(\boldsymbol{S}(X^+)), \qquad H^*(X; A) = \tilde{H}^*(\boldsymbol{S}(X^+); A) \tag{5}$$

($A$ beliebiger Koeffizientenbereich).

Sowohl der Chernsche Charakter als auch der Cohomologie-Automorphismus $\mathscr{P}^{-1}$ (bzw. $Sq^{-1}$) ist mit der „Einhängung" vertauschbar.

In der Formulierung des Satzes bei ADAMS kommt der kanonische Anti-Automorphismus der Steenrodschen Algebra vor. Bei Beachtung von 1.10 folgt unsere Formulierung . Es sei auch noch erwähnt, daß in einem torsionsfreien Raum $Sq = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^{2^i}$, da $Sq^{2^i+1} = Sq^1 Sq^{2^i}$ und $Sq^1$ der Bocksteinsche Operator ist, der in einem Raum ohne 2-Torsion verschwindet.

Ein Beispiel möge den Satz von ADAMS illustrieren. Für Elemente $x_1, \ldots, x_s \in H^2(X; \mathbf{Z})$ gibt es genau ein $\xi \in K^0(X)$ mit

$$ch(\xi) = x_1 \ldots x_s \cdot \prod_{j=1}^{s} (1 - e^{-x_j})/x_j. \tag{6}$$

Für dieses $\xi$ mit $a = x_1 \ldots x_s$ folgt die Formel (4) leicht aus 2.9 (14) und aus

$$\mathscr{P}^{-1}(x_j) = x_j - x_j^q + x_j^{q^2} - \cdots \qquad \text{(s. 2.12 (21'))}. \tag{7}$$

(Die Formel (7) bleibt bestehen, wenn $q = 2$ ist und $\mathscr{P}$ durch $Sq$ ersetzt wird.)

**4.3.** Wir möchten in diesem Abschnitt mit Hilfe des Satzes von ADAMS (4.2) zeigen, daß der Satz 3.2 im Falle torsionsfreier Mannigfaltigkeiten für $\lambda = \mathscr{P}^1$ aus dem „differenzierbaren Riemann-Rochschen Satze" [3] folgt.

Die in diesem Abschnitt vorkommenden Mannigfaltigkeiten sollen *kompakt, orientiert, differenzierbar sein und ihre ganzzahlige Cohomologie soll keine Torsion besitzen.* $X$ sei eine solche Mannigfaltigkeit und $w_2(X) \in H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ ihre zweite Stiefel-Whitneysche Klasse. Da $X$ torsionsfrei ist, kann jedes Element von $H^2(X; \mathbf{Z}_2)$ durch Reduktion mod 2 aus einer ganzzahligen Klasse gewonnen werden. $c_1(X) \in H^2(X; \mathbf{Z})$ sei für jede der in diesem Abschnitt zugelassenen Mannigfaltigkeiten $X$ festgewählt, und zwar so, daß die Reduktion mod 2 von $c_1(X)$ gleich $w_2(X)$ ist.

Die totale Toddsche Klasse $\mathscr{T}(X) \in H^*(X; \boldsymbol{Q})$ wird dann mit Hilfe von $c_1(X)$ und der Pontrjaginschen Klassen $p_i(X)$ wie folgt definiert:

$$\mathscr{T}(X) = e^{c_1(X)/2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j\big(p_1(X), \ldots, p_j(X)\big). \tag{8}$$

Für eine stetige Abbildung $g: Y \to X$ zulässiger Mannigfaltigkeiten und für $\eta \in K^*(Y)$ gilt:

$$g_*\big(ch(\eta) \cdot \mathscr{T}(Y)\big) = ch(g_!\eta) \cdot \mathscr{T}(X), \qquad g_!\eta \in K^*(X). \tag{9}$$

Das ist der differenzierbare Riemann-Rochsche Satz [3, 13]. Das Element $g_!\eta$ von $K^*(X)$ ist durch (9) eindeutig bestimmt, da $X$ nach Voraussetzung keine Torsion hat [4].

Es sei $q$ eine ungerade Primzahl und $f = q^{1/(q-1)}$. Wir nehmen nun an, daß $ch(\eta)$ von der Gestalt (3) ist, also mit $a \in H^n(X; \mathbf{Z})$ beginnt. Dann ist $ch(g_!\eta) = g_* a +$ höhere Glieder. Wir setzen

$$m = \dim g_* a = n + \dim X - \dim Y.$$

Es werde nun in (9) die $2k$-dimensionale Komponente von $\mathscr{T}(Y)$ durch ihr Vielfaches mit $f^k$ ersetzt, ebenso für $\mathscr{T}(X)$. Die $(n+2k)$-dimensionale Komponente von $ch(\eta)$ werde durch ihr Vielfaches mit $f^k$ ersetzt, ebenso werde die $(m+2k)$-dimensionale Komponente von $ch(g_!\eta)$ durch ihr Vielfaches mit $f^k$ ersetzt. Nachdem diese Ersetzungen geschehen sind, werde mod $q$ reduziert. Man erhält auf diese Weise

$$(10) \qquad g_*\big(\mathscr{P}^{-1}(\varrho_q a)\,\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, Y)\big) = \mathscr{P}^{-1}\big(g_*(\varrho_q a)\big)\,\mathrm{Wu}(\mathscr{P}, X).$$

Man wendet hierzu (4) auf $\eta$ und $g_!\eta$ an, beachtet, daß $e^{f c_1(X)/2} = 1 \pmod q$, und benutzt 2.12 (20). Da $Y$ nach Voraussetzung keine Torsion hat, läßt sich jedes Element $y \in H^n(Y; \mathbf{Z}_q)$ als $\varrho_q a$ mit $a \in H^n(Y; \mathbf{Z})$ schreiben und jedes $a \in H^n(Y; \mathbf{Z})$ tritt als Anfangsterm des Chernschen Charakters eines Elementes $\eta \in K^*(Y)$ auf [4]. Also liefert (10) den Satz 3.2 für alle $y \in H^*(Y; \mathbf{Z}_q)$ im Falle des Cohomologie-Automorphismus $\lambda = \mathscr{P}^{-1}$.

## § 5. Über die Relationen zwischen den charakteristischen Zahlen

**5.1.** Wir wollen zunächst die Relationen zwischen den Chernschen Zahlen untersuchen. Vgl. dazu den Bericht [12]. Eine schwache fastkomplexe Struktur auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ ist eine schwache komplexe Struktur des Tangentialbündels von $M$, d.h. ein komplexes Vektorraum-Bündel über $M$, das als reelles Bündel isomorph zum Tangentialbündel von $M$ plus (Whitneysche Summe) einem trivialen reellen Vektorraum-Bündel ist [5, III, §2.1]. Eine schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeit ist kanonisch orientiert, hat also einen orientierten Grundzyklus $[M]$. Die Chernschen Klassen $c_i(M)$ sind per definitionem die des komplexen Vektorraum-Bündels, welches die schwache fastkomplexe Struktur bestimmt. Die Dimension von $M$ sei gerade ($\dim M = 2n$). Für jede Partition $\pi = (i_1, \ldots, i_r)$ von $n$ bilde man das Monom $c_{i_1} \ldots c_{i_r} \in H^{2n}(M; \mathbf{Z})$. Der Wert dieses Monoms auf $[M]$ werde mit $c_\pi(M)$ bezeichnet. Die $c_\pi(M)$ sind ganze Zahlen und werden Chernsche Zahlen von $M$ genannt.

Es sei $B_U$ der klassifizierende Raum der unendlichen unitären Gruppe. ($B_U = \lim_{n\to\infty} B_{U(n)}$). Dann ist

$$(1) \qquad H^{**}(B_U; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[[c_1, c_2, \ldots]],$$

wo $c_i$ die „universelle" $2i$-dimensionale Chernsche Klasse ist. Man hat einen Homomorphismus

$$(2) \qquad \alpha(M): H^{2n}(B_U; \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z},$$

wobei $\alpha(M)(c_{i_1} \ldots c_{i_r}) = c_\pi(M)$, $(\pi = (i_1, \ldots, i_r), i_1 + \cdots + i_r = n)$.

Es sei $q$ eine Primzahl. Nach Reduktion mod $q$ kann die Chernsche Klasse $c_i$ als Element von $H^{2i}(B_U; \mathbf{Z}_q)$ aufgefaßt werden. Es ist dann

$$(3) \qquad H^{**}(B_U; \mathbf{Z}_q) = \mathbf{Z}_q[[c_1, c_2, \ldots]],$$

und wir haben vermöge (2) einen Homomorphismus

$$\alpha(M)_q\colon\ H^{2n}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)\to\mathbf{Z}_q. \tag{4}$$

Man nennt ein Element $a$ von $H^{2n}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$ eine „Relation zwischen Chernschen Zahlen mod $q$", wenn $a$ für alle kompakten differenzierbaren schwach-fastkomplexen Mannigfaltigkeiten $M$ der reellen Dimension $2n$ zum Kern von $\alpha(M)_q$ gehört. Diese Relationen bilden eine Untergruppe von $H^{2n}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$, die wir mit $R^{2n}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$ bezeichnen. $R^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$ sei die Untergruppe derjenigen Elemente von $H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$, deren $2n$-dimensionale Komponente für jedes $n$ zu $R^{2n}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$ gehört.

**5.2.** In $H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$ liegt die universelle totale Chernsche Klasse $c=1+c_1+c_2+\cdots$. Mit $(c^{-1})_i$ werde die $2i$-dimensionale Komponente von $c^{-1}$ bezeichnet. Durch die Festsetzungen

$$c_i\to(c^{-1})_i \tag{5}$$

erhält man einen multiplikativen gradtreuen involutorischen Automorphismus $D$ von $H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$, vgl. [8]. Für eine multiplikative Folge

$$\sum_{j=0}^{\infty}K_j(c_1,\ldots,c_j)\in H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$$

ist

$$D\Big(\sum_{j=0}^{\infty}K_j(c_1,\ldots,c_j)\Big)=\sum_{j=0}^{\infty}K_j(Dc_1,\ldots,Dc_j)=\Big(\sum_{j=0}^{\infty}K_j(c_1,\ldots,c_j)\Big)^{-1}. \tag{6}$$

$D$ ist mit jedem Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ vertauschbar, da $\lambda(c)\in H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$ eine multiplikative Folge ist (mit der charakteristischen Potenzreihe $1+\lambda x$).

Der Automorphismus $D$ entspricht dem Übergang von einem Bündel $\xi$ zu dem inversen Bündel $\eta$ von $\xi$. ($[\xi]+[\eta]=0$, s. [5, III, §1.3].) Der Automorphismus $D$ wird also durch eine „Abbildung" $B_{\mathbf{U}}\to B_{\mathbf{U}}$ induziert. Man kann $D$ auffassen als den kanonischen Anti-Automorphismus der Hopfschen Algebra $H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$, vgl. [1].

**5.3.** Für einen Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ ist $\mathrm{Wu}(\lambda)$ ein multiplikativer Funktor, zu dem eine multiplikative Folge $\{K_j(c_1,\ldots,c_j)\}$ gehört (s. 2.6). Das Element $\sum_{j=0}^{\infty}K_j(c_1,\ldots,c_j)\in H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$ soll ebenfalls mit $\mathrm{Wu}(\lambda)$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$\lambda y-y\cdot\mathrm{Wu}(\lambda)\in R^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)\quad\text{für alle } y\in H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q). \tag{7}$$

Die Aussage (7) ist eine Konsequenz der Formel 3.5 (17), wenn man diese auf eine beliebige schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeit $M$ anwendet, wobei das $y$ von 3.5 (17) alle Polynome in den Chernschen Klassen von $M$ durchläuft.

Ordnet man jedem $y\in H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$ die $2n$-dimensionale Komponente von (7) zu, dann erhält man einen additiven Homomorphismus von $H^{**}(B_{\mathbf{U}};\mathbf{Z}_q)$

in $R^{2n}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q)$, dessen Bild mit $R^{2n}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q; \lambda)$ bezeichnet werde. Die $m$-dimensionale Komponente einer Cohomologie-Klasse $a$ werde gelegentlich durch $a_m$ angedeutet, (obwohl das mit den Bezeichnungen der Chernschen und Pontrjaginschen Klassen nicht übereinstimmt). Die Untergruppe $R^{2n}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q; \lambda)$ von $R^{2n}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q)$ läßt sich auf verschiedene Weisen beschreiben:

Lemma. $R^{2n}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q; \lambda) =$

(i) $\{(\lambda y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda^{-1}) - y)_{2n} \mid y \in H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q)\} =$

(ii) $\{(\lambda^{-1} y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda) - y)_{2n} \mid y \in H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q)\} = R^{2n}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q; \lambda^{-1}) =$

(iii) $\{D(\lambda y \cdot \underline{\lambda} - y)_{2n} \mid y \in H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q)\}.$

Beweis. Zu (i) gelangt man, indem man in (7) $y$ durch $y \cdot \mathrm{Wu}(\lambda)^{-1}$ ersetzt und beachtet, daß $\lambda(\mathrm{Wu}(\lambda)^{-1}) = \mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$, s. 2.8. Man bekommt (ii) aus (7) dadurch, daß man $y$ durch $\lambda^{-1} y$ ersetzt. Im Falle (iii) werde zunächst an den Funktor $\underline{\lambda}$ erinnert, der eine multiplikative Folge von Polynomen bestimmt und damit ein Element von $H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q)$, s. 2.6. Nun folgt (iii) aus (i) wegen der Vertauschbarkeit von $D$ mit $\lambda$ und da $D\,\underline{\lambda} = (\underline{\lambda})^{-1} = \mathrm{Wu}(\lambda^{-1})$.

**5.4.** Milnor führt in [17] das stabile Objekt $M\boldsymbol{U}$ ein (stabiler universeller Thomscher Raum für die unitäre Gruppe). Man hat den Thomschen Isomorphismus

$$\Phi : H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q) \to H^{**}(M\boldsymbol{U}; \boldsymbol{Z}_q), \tag{8}$$

welcher per definitionem im hier betrachteten stabilen Fall die Graduierung erhält. Zu einem Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ gehört der multiplikative Funktor $\underline{\lambda}$, welcher in üblicher Weise als Element von $H^{**}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q)$ aufzufassen ist (2.6). Die Steenrodsche Algebra $S^{**}$ (für die Cohomologie mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_q$) operiert auf $H^{**}(M\boldsymbol{U}; \boldsymbol{Z}_q)$. Für den Cohomologie-Automorphismus $\lambda \in S^{**}$ gilt:

$$\lambda(\Phi y) = \Phi(\lambda y \cdot \underline{\lambda}) \quad \text{für } y \in H^{**}(B_U; \boldsymbol{Z}_q). \tag{9}$$

Die Formel (9) ist das stabile Gegenstück zu 2.15 (24). Aus 5.3 (iii) folgt sofort

$$\begin{cases} \Phi D R^{2n}(B_{\boldsymbol{U}}; \boldsymbol{Z}_q; \lambda) = \{(\lambda y - y)_{2n} \mid y \in H^{**}(M\boldsymbol{U}; \boldsymbol{Z}_q)\} \\ \qquad = \left\{(\lambda y)_{2n} \mid y \in \sum_{i=0}^{n-1} H^{2i}(M\boldsymbol{U}; \boldsymbol{Z}_q)\right\}. \end{cases} \tag{10}$$

Nun hat Milnor in [17] gezeigt, daß die Algebra $S^*/(\delta)$ frei auf $H^*(M\boldsymbol{U}; \boldsymbol{Z}_q)$ operiert. Hierbei ist $S^*$ die Steenrodsche Algebra und $(\delta)$ das von dem Bocksteinschen Operator $\delta$ erzeugte Ideal ($\delta = Sq^1$ für $q = 2$). Man wähle eine Basis von $H^*(M\boldsymbol{U}; \boldsymbol{Z}_q)$ über $S^*/(\delta)$ aus homogen-dimensionalen Elementen. Die Anzahl der Basis-Elemente der Dimension $2n$ ist unabhängig von der Wahl der Basis und werde mit $b(n; q)$ bezeichnet. Wählt man in (10) für $\lambda$ den Steenrodschen Cohomologie-Automorphismus $\mathscr{P}$ (bzw. $Sq$), dann folgt

unmittelbar

$$(11) \qquad \begin{cases} \dim_{\mathbf{Z}_q} R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q; \lambda) = \dim_{\mathbf{Z}_q} H^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q) - b(n; q) \\ \qquad\qquad \text{für} \quad \lambda = \mathscr{P} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = Sq. \end{cases}$$

**5.5.** Schreibt man die *ganzzahligen* Chernschen Klassen $c_i$ formal als elementar-symmetrische Funktionen in Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ($N$ groß) vom Grade 2, dann kann man für jede Partition $\pi = (i_1, \ldots, i_r)$ von $n$ das Element

$$s(\pi) = \sum x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} \in H^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z})$$

einführen. $s(\pi)$ ist die Summe aller paarweise verschiedenen Monome, die aus $x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}$ durch Permutationen der $N$ Variablen entstehen (s. z.B. [*11*, §1.4]). Für eine schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeit $M$ der reellen Dimension $2n$ definieren wir die ganze Zahl $s_\pi(M)$ als Wert von $s(\pi)$ auf dem orientierten Grundzyklus von $M$. Für die Partition $\pi = (n)$ setzen wir $s(M) = s_\pi(M)$. Wenn $n = 2k$, dann stimmt $s(M)$ mit der in 3.6 definierten ganzen Zahl $s(M)$ überein. Genau wie in 3.6 können wir für eine schwach-fastkomplexe $M$ der reellen Dimension $2n$ nachweisen, daß $s(M)$ durch $q$ teilbar ist, wenn $n+1$ eine Potenz der Primzahl $q$ ist.

Milnor hat in [*17*] eine Folge $M_1, M_2, M_3, \ldots$ von projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension 1, 2, 3, ... usw. angegeben, für die gilt:

i) $s(M_n) = 1$, wenn $n+1$ keine Primzahlpotenz ist,

ii) $s(M_n) = q$, wenn $n+1$ eine Potenz der Primzahl $q$ ist.

Aus der Existenz dieser Mannigfaltigkeiten schließt man, daß

$$(12) \qquad \dim_{\mathbf{Z}_q} H^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q) / \dim_{\mathbf{Z}_q} R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q) \geqq a(n; q),$$

wo $a(n; q)$ die Anzahl der Partitionen von $n$ ist, die keinen Summanden der Form $q^i - 1$ enthalten. Man benutzt dazu die Thomsche Formel

$$(13) \qquad s_\omega(M) = \sum_{(\omega_1, \omega_2)} s_{\omega_1}(M') \cdot s_{\omega_2}(M''),$$

wo $M, M', M''$ schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeiten der reellen Dimensionen $2n, 2r, 2s$ sind, $M = M' \times M''$, $n = r + s$, und wo $\omega$ eine Partition von $n$ ist und $(\omega_1, \omega_2)$ alle möglichen Zerlegungen von $\omega$ in eine Partition $\omega_1$ von $r$ und eine Partition $\omega_2$ von $s$ durchläuft. (Die Formel (13) wird in [*22*, Chap. IV, §7] in einem etwas anderen Fall bewiesen.)

Nach Milnor [*17*] ist $a(n; q) = b(n; q)$. Aus (11) und (12) folgt für $\lambda = \mathscr{P}$ bzw. $\lambda = Sq$, daß $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q; \lambda) = R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q)$. Wir fassen das Resultat in folgendem Satz zusammen.

**5.6.** Satz. *Für eine gegebene Primzahl $q$ sei $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q)$ die Gruppe der Relationen* mod $q$, *die zwischen den Chernschen Zahlen schwach-fastkomplexer Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension $2n$ bestehen. $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q; \lambda)$ sei die Untergruppe derjenigen Relationen, die sich mit Hilfe der Wuschen Methode* (7)

*und des Cohomologie-Automorphismus $\lambda$ (für die Cohomologie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$) erhalten lassen. Im allgemeinen ist $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q; \lambda)$ eine echte Untergruppe von $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q)$. Wählt man jedoch den Steenrodschen Cohomologie-Automorphismus $\mathscr{P}$ (q ungerade) bzw. Sq (für $q=2$), dann gilt*

$$R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q; \mathscr{P}) = R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q) \quad bzw. \quad R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_2; Sq) = R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_2).$$

*Die Wuschen Relationen sind also vollständig. Die Dimension von $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}_q)$ über $\mathbf{Z}_q$ ist gleich der Anzahl der Partitionen von n, die wenigstens einen Summanden der Form $q^i - 1$ enthalten.*

**5.7.** In 5.1 (2) haben wir den Homomorphismus $\alpha(M): H^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ eingeführt. $\mathrm{Hom}(H^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) = H_{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z})$ ist eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gleich der Anzahl der Partitionen von $n$ ist. Die Menge der $\alpha(M)$, wo $M$ alle schwach-fastkomplexen Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension $2n$ durchläuft, bildet eine Untergruppe von $H_{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z})$ von endlichem Index. Diese Untergruppe kann durch Kongruenzen zwischen den Chernschen Zahlen angegeben werden. Diese Kongruenzen sind im Prinzip berechenbar (Milnor [17, Part II]). Für eine vollständige Liste der Kongruenzen für $n \leqq 4$ s. [12]. Der Homomorphismus $\alpha(M): H^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ induziert einen Homomorphismus

$$\alpha(M)_{\mathbf{Q}}: H^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}.$$

Es sei $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ die Untergruppe derjenigen Elemente von $H^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q})$, auf denen $\alpha(M)_{\mathbf{Q}}$ für jede schwach-fastkomplexe $M$ der reellen Dimension $2n$ ganzzahlige Werte annimmt. $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ist die Gruppe der Kongruenzen zwischen den Chernschen Zahlen schwach-fastkomplexer Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension $2n$. Es sei $R^{**}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ die Gruppe der Elemente von $H^{**}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q})$, deren $2n$-dimensionale Komponenten für jedes $n$ zu $R^{2n}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ gehören.

Schreibt man die ganzzahligen Chernschen Klassen wieder formal als elementar-symmetrische Funktionen in den Variablen $x_1, \ldots, x_N$ ($N$ groß) vom Grade 2, dann kann man die elementar-symmetrischen Funktionen $e_1, e_2, \ldots$ in den $1 - e^{-x_i}$ einführen. Das sind wohldefinierte Elemente von $H^{**}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q})$. Den von $e_0 = 1, e_1, e_2, \ldots$ über $\mathbf{Z}$ erzeugten Unterring von $H^{**}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q})$ bezeichnen wir mit $ch(B_{\mathbf{U}})$. Es sei $\mathscr{T}$ die universelle Toddsche Klasse

$$\mathscr{T} = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j) \in H^{**}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q}).$$

Satz. *Für jedes $z \in ch(B_{\mathbf{U}})$ gehört $z \cdot \mathscr{T}$ zu $R^{**}(B_{\mathbf{U}}; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.*

Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus bekannten Ganzzahligkeitssätzen im Zusammenhang mit dem Satz von Riemann-Roch (s. [5, Part III, Theorem 3.6] oder [3]). Man hat zu beachten, daß $z \in ch(B_{\mathbf{U}})$ für jede schwach-fastkomplexe $M$ ein Element von $chK(M)$ liefert, (das zum komplexen Tangentialbündel vermöge einer Darstellung der unitären Gruppe assoziiert ist).

VERMUTUNG. $R^{2n}(B_U; \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}) = \{(z \cdot \mathscr{T})_{2n} | z \in ch(B_U)\}$, *wo* $(z \cdot \mathscr{T})_{2n}$ *die* $2n$-*dimensionale Komponente von* $z \cdot \mathscr{T}$ *bezeichnet.*

Wir können diese Vermutung nicht beweisen. Jedoch werden wir zeigen, daß die $(z \cdot \mathscr{T})_{2n}$ für jede Primzahl $q$ alle Relationen mod $q$ liefern. *Die ungelöste Frage ist dann die nach den Relationen modulo den Potenzen einer Primzahl.* Wir betrachten ein Monom $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r}$, wo $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ eine Partition einer Zahl $k < n$ ist. Für $k = 0$ haben wir nur das Monom 1. Das Monom $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ ist ein Element von $H^{**}(B_U; \boldsymbol{Q})$, das mit $c_{i_1} \dots c_{i_r}$ beginnt. Ersetzt man in $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ die Komponente der Dimension $2k + 2j$ durch ihr Vielfaches mit $f^j$, wo $f = q^{1/(q-1)}$ und reduziert modulo $q$, dann geht $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ in $\mathscr{P}^{-1}(c_{i_1} \dots c_{i_r})$ über. Das ist eine rein formale Tatsache im Zusammenhang mit dem Satz von Adams (s. 4.2 (6)). (Für $q = 2$ ist $\mathscr{P}$ durch $Sq$ zu ersetzen.) Ersetzt man ferner in $\mathscr{T}$ die $2j$-dimensionale Komponente durch ihr Vielfaches mit $f^j$, dann geht $\mathscr{T}$ in $\mathrm{Wu}(\mathscr{P})$ bzw. $\mathrm{Wu}(Sq)$ durch Reduktion mod $q$ über. (Siehe 2.9, 2.11, 2.13.) Aus 5.3 (ii) und 5.6 folgt unmittelbar

SATZ. *Die Riemann-Roch-Kongruenzen* $z \cdot \mathscr{T} \in R^{**}(B_U; \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z})$, $z \in ch(B_U)$, *implizieren alle Relationen* mod $q$ *zwischen den Chernschen Zahlen.*

**5.8.** Für die Pontrjaginschen Zahlen einer orientierten kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ gelten ähnliche Resultate, wie wir sie für die Chernschen Zahlen besprochen haben. Es sei $B_O$ der klassifizierende Raum für die unendliche orthogonale Gruppe. Ist $q$ eine ungerade Primzahl, dann gilt

$$H^{**}(B_O; \boldsymbol{Z}_q) = \boldsymbol{Z}_q[[p_1, p_2, \dots]],$$

wo $p_i \in H^{4i}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$ die Reduktion mod $q$ der universellen ganzzahligen Pontrjaginschen Klasse der Dimension $4i$ ist. Für jede orientierte kompakte differenzierbare $M$ sind die Pontrjaginschen Zahlen definiert. Das sind ganze Zahlen. Reduktion mod $q$ der Pontrjaginschen Zahlen liefert einen Homomorphismus

$$\alpha(M)_q : H^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q) \to \boldsymbol{Z}_q, \qquad \dim M = 4k.$$

$R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$ sei die Untergruppe der Elemente von $H^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$, welche für jede $4k$-dimensionale orientierte kompakte differenzierbare $M$ zum Kern von $\alpha(M)_q$ gehören. $R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$ ist die Gruppe der Relationen mod $q$ zwischen den Pontrjaginschen Zahlen in der Dimension $4k$.

SATZ. *Es sei* $\mathscr{P}$ *der Steenrodsche Cohomologie-Automorphismus für die Cohomologie mit Koeffizienten in* $\boldsymbol{Z}_q$ *(*$q$ *ungerade Primzahl). Der multiplikative Funktor* $\mathrm{Wu}(\mathscr{P})$ *ist ein Element von* $H^{**}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$. *Es gilt*

$$R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q) = \{(\mathscr{P} y - y \cdot \mathrm{Wu}(\mathscr{P}))_{4k} | y \in H^{**}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)\}.$$

*Die Relationen, die sich mit Hilfe der Wuschen Methode gewinnen lassen* (3.5 (17)), *liefern also ganz* $R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$. *Die Dimension von* $R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Z}_q)$ *ist gleich der Anzahl der Partitionen von* $2k$, *die nur gerade Summanden enthalten und für die wenigstens ein Summand von der Form* $q^i - 1$ *ist.*

Der Beweis erfolgt analog wie im Fall der Chernschen Zahlen unter wesentlicher Benutzung der Arbeit [17] von Milnor. Man kann wie in 5.7 die Gruppe $R^{4k}(B_O; \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{R})$ aller Kongruenzen zwischen den Pontrjaginschen Zahlen einführen, eine analoge Vermutung formulieren und auch eine dem letzten Satz von 5.7 entsprechende Behauptung beweisen.

**5.9.** Schließlich gelten ähnliche Überlegungen für die Stiefel-Whitneyschen Zahlen von nicht notwendigerweise orientierbaren Mannigfaltigkeiten. Diese Zahlen sind Elemente von $\boldsymbol{Z}_2$. Auch hier gilt die Vollständigkeit der Wuschen Relationen, was von Dold bewiesen wurde [8], dessen Beweismethode wir im §5 der vorliegenden Arbeit ganz entscheidend benutzt haben.

## Literatur


[1] Adams, J. F.: On formulae of Thom and Wu. (erscheint demnächst).

[2] — On Chern characters and the structure of the unitary group. Proc. Cambr. Phil. Soc. **57**, 189—199 (1961).

[3] Atiyah, M. F., and F. Hirzebruch: Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **65**, 276—281 (1959).

[4] —, and F. Hirzebruch: Vector bundles and homogeneous spaces. Differential Geometry. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 3, American Mathematical Society 1961.

[5] Borel, A., and F. Hirzebruch: Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III. Amer J. Math. **80**, 458—538 (1958); **81**, 315—382 (1959); **82**, 491—504 (1960).

[6] —, et J. P. Serre: Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). Bull. Soc. Math. France **86**, 97—136 (1958).

[7] Cartan, H.: Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane, I et II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40**, 467—471 und 704—707 (1954).

[8] Dold, A.: Vollständigkeit der Wuschen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **65**, 200—206 (1956).

[9] Eilenberg, S., and N. Steenrod: Foundations of algebraic topology. Princeton Mathematical Series 15, Princeton University Press 1952.

[10] Hirzebruch, F.: On Steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the Todd genus. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 951—956 (1953).

[11] — Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebnisse der Mathematik. Neue Folge, Heft 9. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[12] — Komplexe Mannigfaltigkeiten. Proc. of the Intern. Congr. of Math. 1958, Cambridge University Press 1960, pp. 119—136.

[13] — A Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds. Séminaire Bourbaki, Exp. 177, Février 1959.

[14] Milnor, J.: The geometric realization of a semi-simplicial complex. Ann. Math. (2) **65**, 357—362 (1957).

[15] — Lectures on characteristic classes. Mimeographed notes. Princeton 1957.

[16] — The Steenrod algebra and its dual. Ann. Math. **67**, 150—171 (1958).

[17] — On the cobordism ring $\Omega^*$ and a complex analogue, Part I. Amer. J. Math. **82**, 505—521 (1960). Part II erscheint demnächst.

[18] Puppe, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. Math Z. **69**, 299—344 (1958).

[19] Serre, J. P.: Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Comm. Math. Helv. **27**, 198—232 (1953).

[20] Steenrod, N.: Homology groups of symmetric groups and reduced power operations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 213—223 (1953).

[21] — Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions. Colloquium lectures. Mimeographed notes. Princeton 1957.
[22] Thom, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comm. Math. Helv. **28**, 17—86 (1954).
[23] Uspensky, J. V., and M. A. Heaslet: Elementary Number Theory. New York 1939.
[24] Whitehead, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949).
[25] Wu Wen-Tsun: Classes caractéristiques et $i$-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci., Paris **230**, 508—511 (1950).
[26] — Sur les puissances de Steenrod. Colloque de Topologie de Strasbourg 1951 (vervielfältigt).

*Mathematisches Institut der Universität, Bonn*

*Pembroke College, Cambridge*

*Mathematical Institute, Oxford*

*(Eingegangen am 10. April 1961)*

Kneser, M.
Math. Zeitschr. 77, 188—194 (1961)

# Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen

Herrn Friedrich Karl Schmidt zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

Martin Kneser

*1. Einleitung.* Der Satz von Minkowski und Siegel über definite quadratische Formen [*8*, I] gestattet es, einen Mittelwert der Darstellungsanzahlen einer Zahl $a$ durch die verschiedenen nichtäquivalenten Formen $f_i$ eines Geschlechts durch Lösungsanzahlen entsprechender Kongruenzen auszudrücken. Für indefinite Formen werden die Darstellungsanzahlen im allgemeinen unendlich; an ihre Stelle treten die Darstellungsmaße von $a$ durch $f_i$ [*8*, II], [*3*]. Siegel [*9*] zeigte später mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln, daß im Fall indefiniter Formen $f_i$ in $n \geqq 4$ Veränderlichen schon das Darstellungsmaß durch jede einzelne Form $f_i$ sich so berechnen läßt, und Eichler [*4*] erreichte dasselbe (allerdings unter etwas schärferen Voraussetzungen, vgl. weiter unten Nr. 4) mit arithmetischen Mitteln, indem er unter diesen Voraussetzungen eine schärfere Aussage bewies, aus der abzulesen ist, daß die Darstellungsmaße für alle Formen eines Geschlechts übereinstimmen. Eine einfache Folgerung aus diesen Ergebnissen ist die Aussage, daß eine Zahl $a$ durch alle Formen $f_i$ dargestellt wird, wenn sie von einer einzigen dargestellt wird, wenn also die notwendigen Kongruenzbedingungen für die Darstellung durch Formen des Geschlechts erfüllt sind. Für diese einfachere Aussage hat Watson [*11*] (vgl. auch [*10*], Thm. 53) einen ganz elementaren Beweis gegeben, und nach Jones und Watson [*5*] gilt sie auch noch für indefinite Formen in drei Veränderlichen, wenn man endlich viele genau angebbare Quadratklassen für $a$ ausschließt. Im folgenden wird gezeigt, daß auch bei ternären Formen in der Regel die Gleichheit der Darstellungsmaße gilt und daß über die von Eichler [*4*] behandelten Fälle hinaus allgemein arithmetische Methoden anwendbar sind. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die schon in [*4*] benützten Hilfsmittel, nur in etwas anderer Sprache, nämlich der der Adele [*12*].

*2. Darstellungsmaße.* Wir verwenden die geometrische Sprechweise wie in [*3*]. Es seien

$k$ ein algebraischer Zahlkörper,
$\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen Zahlen aus $k$,
$V$ ein Vektorraum der endlichen Dimension $n$ über $k$ mit einer nicht ausgearteten quadratischen Form $f(x)$,
$M$ ein Gitter in $V$, d.h. ein endlich erzeugter $\mathfrak{o}$-Modul vom Rang $n$,
$O(V)$ die orthogonale Gruppe von $V$ bezüglich $f$,
$O(M)$ die Untergruppe der Einheiten von $M$,

$O(V, x)$ für irgendeinen Vektor $x \neq 0$ aus $V$ die Fixgruppe von $x$ in $O(V)$, $O(M, x) = O(V, x) \cap O(M)$.

Ist $\mathfrak{p}$ eine — endliche oder unendliche — Primstelle von $k$, so bezeichnen wir durch einen Index $\mathfrak{p}$ jeweils die entsprechende Erweiterung auf die vollständige Hülle $k_\mathfrak{p}$ von $k$ bzw., wenn $\mathfrak{p}$ endlich ist, auf den Ring $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ der ganz $\mathfrak{p}$-dische Zahlen.

Eine Darstellung $(x, M)$ der Zahl $a$ durch das Gitter $M$ wird gegeben durch einen Vektor $x \in M$ mit $f(x) = a$. Zwei Darstellungen $(x, M)$ und $(y, N)$ nennen wir äquivalent, wenn es ein $u \in O(V)$ gibt mit $ux = y$, $uM = N$; insbesondere sind zwei Darstellungen $(x, M)$ und $(y, M)$ äquivalent, wenn $ux = y$ mit $u \in O(M)$ ist, und zwei Darstellungen $(x, M)$ und $(x, N)$, wenn $N = uM$ ist mit $u \in O(V, x)$. Nach dem Wittschen Isomorphiesatz gibt es bei gegebenem Vektor $x \in V$ mit $f(x) = a$ zu jeder Darstellung $(y, N)$ von $a$ eine äquivalente $(x, M)$ mit einem geeigneten Gitter $M$; wir können uns also auf Darstellungen mit vorgegebenem $x$ beschränken. $(x, M)$ und $(y, N)$ heißen verwandt, wenn es zu jedem $\mathfrak{p}$ ein $u_\mathfrak{p} \in O(V_\mathfrak{p})$ gibt mit $u_\mathfrak{p} x = y$, $u_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p}$. Äquivalente Darstellungen fassen wir zu einer Klasse, verwandte zu einem Geschlecht von Darstellungen zusammen.

Das Produkt der Gruppen $O(V_\mathfrak{p}, x)$ über alle unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von $k$ bezeichnen wir mit $O_\infty(V, x)$. Die Gruppe $O(M, x)$ ist in jedem Faktor $O(V_\mathfrak{p}, x)$ als diskrete Untergruppe enthalten; sie operiert daher auch durch Linksmultiplikation als diskrete Transformationsgruppe auf $O_\infty(V, x)$. Da das Haarsche Maß $\mu_\infty$ auf $O_\infty(V, x)$ links- und rechtsinvariant ist, induziert es ein invariantes Maß auf dem homogenen Raum $O_\infty(V, x)/O(M, x)$, das wir auch mit $\mu_\infty$ bezeichnen. $\mu_\infty(O_\infty(V, x)/O(M, x))$ heißt das Darstellungsmaß von $(x, M)$; es ist natürlich erst dann eindeutig bestimmt, wenn die in $\mu_\infty$ noch freie Konstante festgelegt ist. Da wir hier nur verschiedene Maße miteinander vergleichen wollen, kommt es uns darauf nicht an. Die einzige Eigenschaft, die wir brauchen, ist, daß die Normierung so vorgenommen werden kann, daß unter einer orthogonalen Transformation $u$ von $V$ das Maß auf $O_\infty(V, x)$ in das auf $O_\infty(V, ux)$ übergeht. Dann stimmt das Darstellungsmaß für äquivalente Darstellungen überein und wird als Darstellungsmaß der Klasse bezeichnet [3, 8]. Summiert man diese Maße bei festem $M$ über ein volles System nicht äquivalenter Darstellungen von $a$ durch $M$, so erhält man das Darstellungsmaß von $a$ durch $M$. Entsprechend werden die Darstellungsmaße von $a$ durch ein Spinorgeschlecht [3, 6] oder ein Geschlecht definiert.

*3. Adele* (vgl. [12]). Die Adelgruppe $O_A(V)$ ist das eingeschränkte direkte Produkt der Gruppen $O(V_\mathfrak{p})$ bezüglich der Untergruppen $O(M_\mathfrak{p})$, d.h. die Vereinigung der Gruppen $O_S(V) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} O(V_\mathfrak{p}) \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O(M_\mathfrak{p})$, wo $S$ alle endlichen, sämtliche unendlichen Primstellen enthaltenden Mengen von Primstellen durchläuft. $O_A(V)$ besitzt eine Topologie, in der die $O_S(V)$ offen sind und die auf $O_S(V)$ induzierte Topologie gerade die Produkttopologie der einzelnen

Faktoren ist. $O_A(V)$ ist lokalkompakt und enthält $O(V)$ als diskrete Untergruppe, wenn man das Element $u \in O(V)$ mit dem Adel identifiziert, dessen Komponenten $u_\mathfrak{p}$ alle gleich $u$ sind. Entsprechend definiert man die Adelgruppe $O_A(V, x)$ von $O(V, x)$.

Ist $M$ ein Gitter in $V$ und $u = \{u_\mathfrak{p}\} \in O_A(V)$, so gibt es genau ein Gitter $N$ mit $N_\mathfrak{p} = u_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p}$ für alle endlichen $\mathfrak{p}$; wir schreiben $N = uM$. Die Untergruppe $O_\infty(V) \times \prod_{\mathfrak{p}\text{ endl.}} O(M_\mathfrak{p})$ der $u \in O_A(V)$ mit $uM = M$ bezeichnen wir mit $O_A(M)$ und setzen $O_A(M) \cap O_A(V, x) = O_A(M, x)$. Ist $(x, M)$ eine Darstellung von $a$ durch $M$ und $u \in O_A(V, x)$, so gehört $(x, uM)$ zum selben Geschlecht von Darstellungen, und jede Darstellung $(x, N)$ aus diesem Geschlecht erhält man auf diese Weise. $(x, uM)$ und $(x, vM)$ stimmen genau dann überein, wenn $u$ und $v$ zur selben Restklasse $uO_A(M, x)$ gehören; sie sind genau dann äquivalent, wenn $u$ und $v$ zur selben zweiseitigen Klasse $O(V, x) u O_A(M, x)$ gehören. Die Darstellungsklassen des Geschlechts von $(x, M)$ entsprechen also umkehrbar eindeutig diesen zweiseitigen Restklassen.

Es sei nun $\mu$ ein Haarsches Maß auf $O_A(V, x)$, dargestellt als Produkt der Maße $\mu_\infty$ auf $O_\infty(V, x)$ und $\mu_0$ auf dem komplementären Faktor $O_0(V, x)$ derjenigen $u \in O_A(V, x)$, deren Komponenten $u_\mathfrak{p} = 1$ sind für alle unendlichen $\mathfrak{p}$. Wir berechnen das Maß

$$\mu\big(O(V, x)\, u\, O_A(M, x)/O(V, x)\big). \tag{1}$$

Es ist, abgesehen von zwei Ausnahmefällen, endlich, da das Maß des ganzen homogenen Raumes $O_A(V, x)/O(V, x)$ endlich ist [12]. Die Ausnahmen sind $n = 3$, $a \neq 0$ und der zu $x$ orthogonale Teilraum von $V$ ist isotrop, sowie $n = 4$, $a = 0$ und $f$ hat quadratische Diskriminante. Wegen der Invarianz von $\mu$ können wir in (1) von rechts mit $u^{-1}$ multiplizieren und dann $uO_A(M, x)u^{-1} = O_A(uM, x)$ beachten. Wir erhalten

$$\mu\big(O(V, x)\, O_A(uM, x)/O(V, x)\big),$$

und das ist, da $O(V, x)$ eine diskrete, $O_A(uM, x)$ eine offene Untergruppe von $O_A(V, x)$ ist, gleich

$$\mu\big(O_A(uM, x)/O_A(uM, x) \cap O(V, x)\big) = \mu\big(O_A(uM, x)/O(uM, x)\big).$$

Ist nun $F$ ein Fundamentalbereich für $O_\infty(V, x)$ modulo $O(uM, x)$, so ist $F \times \big(O_0(V, x) \cap O_A(uM, x)\big)$ einer für $O_A(uM, x) = O_\infty(V, x) \times \big(O_0(V, x) \cap O_A(uM, x)\big)$ modulo $O(uM, x)$. Daraus ergibt sich das gesuchte Maß zu

$$\mu_\infty\big(O_\infty(V, x)/O(uM, x)\big)\, \mu_0\big(O_0(V, x) \cap O_A(uM, x)\big).$$

Hier ist schließlich $O_A(uM, x) = uO_A(M, x)u^{-1}$ und wegen der beiderseitigen Invarianz von $\mu_0$ daher

$$\left\{\begin{aligned} &\mu\big(O(V, x)\, u\, O_A(M, x)/O(V, x)\big) \cdot \\ &\qquad = \mu_\infty\big(O_\infty(V, x)/O(uM, x)\big)\, \mu_0\big(O_0(V, x) \cap O_A(M, x)\big). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

In Worten: Das Maß (1) ist bis auf den von $u$ unabhängigen Faktor $c = \mu_0(O_0(V, x) \cap O_A(M, x))$ gleich dem Darstellungsmaß von $(x, uM)$[1]).

*4. Spinorgeschlechter.* Die verschiedenen Klassen aus einem Geschlecht von Darstellungen verteilen sich auf die verschiedenen Klassen von Gittern und damit auch auf die verschiedenen Spinorgeschlechter. Jedes Geschlecht von Darstellungen von $a$ liefert also gewisse Beiträge zum Darstellungsmaß von $a$ durch die einzelnen Spinorgeschlechter; diese Beiträge wollen wir jetzt miteinander vergleichen. Dazu betrachten wir die Untergruppe $O'_A(V)$ derjenigen Adele $u = \{u_\mathfrak{p}\}$ aus $O_A(V)$, bei denen $u_\mathfrak{p}$ ein eigentlicher Automorphismus von $V_\mathfrak{p}$ mit der Spinornorm 1 ist für alle $\mathfrak{p}$. Wir zählen $M$ und $N$ zum selben Spinorgeschlecht, wenn $N = vwM$ ist mit $v \in O(V)$ und $w \in O'_A(V)$[2]). Die Spinorgeschlechter aus dem Geschlecht von $M$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den Doppelklassen $O(V)O'_A(V)uO_A(M)$, und der Beitrag des Geschlechts von $(x, M)$ zum Darstellungsmaß von $a$ durch das Spinorgeschlecht von $uM$ ist

$$c^{-1}\mu\left(O_A(V, x) \cap O(V)\, O'_A(V)\, u\, O_A(M)/O(V, x)\right). \tag{3}$$

Da $O'_A(V)$ die Kommutatorgruppe von $O_A(V)$ umfaßt, kann man den Faktor $u$ rechts herausziehen. Wenn außerdem $u$ in $O_A(V, x)$ liegt, so kann man $O_A(V, x)u$ statt $O_A(V, x)$ schreiben, so daß sich wegen der Translationsinvarianz von $\mu$ die Größe (3) als von $u$ unabhängig erweist. Um zu entscheiden, wann $u$ in $O_A(V, x)$ gewählt werden kann, erreichen wir zunächst durch Multiplikation mit einem Faktor aus $O_A(M)$, daß alle Komponenten $u_\mathfrak{p}$ von $u$ die Determinante $+1$ haben; das geht, da es in $O(M_\mathfrak{p})$ stets Elemente der Determinante $-1$ gibt ([3], Satz 10.5). Ist nun $n \geqq 5$ oder $n = 4$ und $a \neq 0$, enthält also $V$ einen zu $x$ orthogonalen dreidimensionalen, bezüglich $f$ nicht ausgearteten Teilraum $W$ und $O_A(V, x)$ daher die Untergruppe $O_A(W)$, so gibt es nach der Schlußweise von [6], p. 327 ein $v$ in $O_A(W)$, das sich von $u$ nur um einen Faktor aus $O'_A(V)$ unterscheidet, so daß $u$ durch $v$ ersetzt werden kann. Damit haben wir den

Satz 1. *Ist $n \geqq 5$ oder $n = 4$ und $a \neq 0$, so ist der Beitrag eines festen Geschlechts von Darstellungen von $a$ zum Darstellungsmaß von $a$ durch ein*

[1]) Dieser Faktor stellt sich als das Inverse des Produkts von $\mathfrak{p}$-adischen Darstellungsdichten heraus. Summiert man über die verschiedenen Doppelrestklassen, so erhält man links $\mu(O_A(V, x)/O(V, x))$. Dividiert man durch den Faktor $c$ und summiert noch über die sämtlichen zu dem Geschlecht des Gitters $M$ gehörigen Geschlechter von Darstellungen, so erhält man Siegels Satz [3, 8], vorausgesetzt, daß man $\mu$ geeignet normiert und das Maß $\mu(O_A(V, x)/O(V, x))$ berechnet hat; vgl. dazu [12]. Ersetzt man im Falle definiter Formen mit rationalen Koeffizienten $O_A(M, x)$ durch die Gruppe derjenigen $u \in O_A(V, x)$, die nicht nur $M$, sondern mit einer beliebigen aber festen Zahl $v$ alle Restklassen von $M$ mod $vM$ festlassen, so erhält man die Verallgemeinerung von van der Blij [1].

[2]) In [6] wurde verlangt, daß $v$ in der kleineren Gruppe $O^+(V)$ der eigentlichen Automorphismen von $V$ liegt. Das ergibt u. U. eine engere Einteilung, entsprechend der Unterscheidung zwischen eigentlich und uneigentlich äquivalenten quadratischen Formen. Alle Ergebnisse lassen sich ohne weiteres auf diese engere Einteilung übertragen, indem man überall $O(V)$ durch $O^+(V)$ ersetzt.

*Spinorgeschlecht von Gittern für alle Spinorgeschlechter eines Geschlechts der gleiche.*

Ist $f$ indefinit, so fallen die Spinorgeschlechter mit den Klassen zusammen. Summiert man über die verschiedenen Geschlechter von Darstellungen, so erhält man die Gleichheit der Darstellungsmaße von $a$ durch die verschiedenen Klassen des Geschlechts, also mit Hilfe von [8] das Ergebnis von [9], abgesehen von dem Fall $n=4$, $a=0$, der im nächsten Abschnitt behandelt wird[3]).

Ist über die bisherigen Voraussetzungen hinaus $a \neq 0$ und der zu $x$ orthogonale Teilraum von $V$ indefinit, so liegt $O(V, x)O_\infty(V, x)$ dicht in $O(V, x)$ $O_\infty(V, x)O'_A(V, x)$ nach [6], p. 325. Da $O_A(M, x)$ offen ist und $O_\infty(V, x)$ enthält, und da $O'_A(V, x)$ die Kommutatorgruppe von $O_A(V, x)$ enthält, gilt

$$O(V, x)\, u\, O_A(M, x) = O(V, x)\, O'_A(V, x)\, O_A(M, x)\, u,$$

so daß Rechtsmultiplikation mit einem Element aus $O_A(V, x)$ diese Doppelklassen untereinander permutiert. Das ergibt sofort das schärfere Ergebnis von EICHLER [3], Satz 6; im übrigen ist dieser Beweis im Grunde nichts anderes als der aus [3].

*5. Die Fälle $n=3$, $a\neq 0$ und $n=4$, $a=0$.* Es sei zunächst $n=3$, $a\neq 0$, $W$ der zu $x$ orthogonale Teilraum der Dimension 2 mit der Diskriminante $d\neq 0$. Wir fragen uns, wann ein gegebenes $u$ in (3) durch ein Element aus $O_A(V, x)$ ersetzt werden kann. Das ist genau dann der Fall, wenn $u$ in

$$O'_A(V)\, O(V)\, O_A(V, x)\, O_A(M) \tag{4}$$

liegt. Wir wählen wieder $u \in O^+_A(V)$ und fragen, wann $u$ in der kleineren Gruppe

$$O'_A(V)\, O^+(V)\, O^+_A(V, x)\, O^+_A(M)$$

liegt, wo das Pluszeichen jeweils die Beschränkung auf eigentliche Automorphismen andeutet. Bilden wir die Spinornorm $\Theta(u)$ eines Adels $u$ komponentenweise, so besteht $O'_A(V)$ gerade aus den Adelen der Spinornorm 1, und unsere Bedingung lautet

$$\Theta(u) \in \Theta\big(O^+(V)\big)\, \Theta\big(O^+_A(V, x)\big)\, \Theta\big(O^+_A(M)\big). \tag{5}$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns jetzt auf den Fall, daß $f$ total indefinit ist, d.h. daß $f$ an allen unendlichen Primstellen die Null darstellt; dann ist, wenn wir jeweils modulo Quadraten rechnen, $\Theta\big(O^+(V)\big) = k^\times$ nach [7], Satz A, und $\Theta\big(O^+(V_\mathfrak{p}, x)\big) = \Theta\big(O^+(W_\mathfrak{p})\big) = N_{K_\mathfrak{P}\, k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P})$, wo $K = k\big(\sqrt{d}\big)$ und $\mathfrak{P}$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{p}$ ist ([3], §5.1). Also ist $\Theta\big(O^+(V)\big)\Theta\big(O^+_A(V, x)\big)$ gerade die der quadratischen Erweiterung $K/k$ zugeordnete Untergruppe vom Index 2

[3]) In [9] werden auch noch Darstellungen durch inhomogene Gitter $M+z$ betrachtet, wo $z$ in $V$, aber nicht in $M$ liegt. Da die Gruppe $O_A(V)$ die inhomogenen Gitter genauso wie die homogenen Gitter permutiert, kann man die ganzen Überlegungen auch für inhomogene Gitter durchführen; nur muß man dann von Anfang an nur mit eigentlichen orthogonalen Transformationen arbeiten, da der Satz 10.5 aus [3] kein Analogon für inhomogene Gitter hat.

(oder 1, wenn $d$ ein Quadrat ist; diesen Fall schließen wir nachher aus, da dann die Darstellungsmaße unendlich werden) der Idelgruppe von $k$ [2]. Es kann also höchstens dann ein $u$ geben, das der Bedingung (5) nicht genügt, wenn $\Theta\left(O_A^+(M)\right)$ in dieser Untergruppe liegt, d.h. wenn $\Theta\left(O^+(M_\mathfrak{p})\right)$ darin liegt für jedes $\mathfrak{p}$, und das bedeutet $\Theta\left(O^+(M_\mathfrak{p})\right) \subseteqq N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P}^\times)$ für alle endlichen $\mathfrak{p}$ und $k_\mathfrak{p} \subseteqq N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P}^+)$ für die unendlichen $\mathfrak{p}$; die letzte Bedingung bedeutet aber, daß $d$ an allen reellen Primstellen von $k$ positiv sein muß.

Wenn nun alle diese Bedingungen erfüllt sind und es tatsächlich Elemente $u$ gibt, die nicht in (4) liegen, so zeigen unsere Überlegungen, daß die Gruppe (4) in $O_A(V)$ den Index 2 hat und daß sie zudem bei festem $V$ nicht von $M$ und $x$, sondern nur von $d$, also von $a$ abhängt. Da die Spinorgeschlechter aus dem Geschlecht von $M$ den Restklassen $O'_A(V)O(V)O_A(M)u$ entsprechen [6], verteilen sie sich auf zwei „Halbgeschlechter", die beide gleichviel, nämlich

$$\left[O'_A(V)\,O(V)\,O_A(V,x)\,O_A(M) : O'_A(V)\,O(V)\,O_A(M)\right]$$

Spinorgeschlechter enthalten, derart, daß das Darstellungsgeschlecht $(x, M)$ zum Darstellungsmaß von $a$ durch zwei Spinorgeschlechter den gleichen Beitrag liefert, wenn diese zum selben Halbgeschlecht gehören. Da wir es mit indefiniten Formen zu tun haben, können wir statt Spinorgeschlecht auch Klasse sagen; und da die Einteilung in Halbgeschlechter nur von $a$ abhängt, können wir über die verschiedenen Darstellungsgeschlechter summieren und erhalten den

Satz 2. *Ist mit den oben erklärten Bezeichnungen $n=3$, $a \neq 0$, $d$ kein Quadrat und $f$ total indefinit, so ist entweder das Darstellungsmaß von $a$ durch alle Formen aus dem Geschlecht von $f$ das gleiche, oder aber das Geschlecht enthält eine gerade Anzahl $2r$ von Klassen, die sich auf zwei Halbgeschlechter von je $r$ Klassen verteilen, derart, daß zwei Formen aus demselben Halbgeschlecht das gleiche Darstellungsmaß liefern. Der zweite Fall kann nur dann eintreten, wenn $d$ für alle reellen Primstellen positiv und*

$$\Theta\left(O^+(M_\mathfrak{p})\right) \subseteqq N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P}^\times) \tag{6}$$

*für alle endlichen $\mathfrak{p}$ ist.*

Dieser Satz hängt eng mit Theorem 2 aus [5] zusammen. Dort wird nur behauptet, daß $a$ entweder von allen Formen des Geschlechts oder von keiner, oder aber von genau der Hälfte dargestellt wird, und es werden notwendige Bedingungen (i) bis (iv) für das Eintreten des letzten Falles angegeben. Die dortige Bedingung (i) besagt in unserer Bezeichnung gerade $d > 0$ ($k$ ist der rationale Zahlkörper) und $d$ ist kein Quadrat; (ii) und (iii) stimmen mit (6) für diejenigen $\mathfrak{p}$, die nicht in der Diskriminante von $M$ aufgehen, überein, da in diesem Fall $\Theta\left(O^+(M_\mathfrak{p})\right)$ alle Einheiten von $k_\mathfrak{p}$ enthält, $\mathfrak{p}$ also in $K$ unverzweigt sein muß; diese Bedingung läßt für $d$, also auch für $a$, nur endlich viele Quadratklassen zu; zu (iv) haben wir kein Analogon, da es bei Nichterfülltsein dieser Bedingung vermutlich vorkommen kann, daß die Darstellungsmaße zwei verschiedene positive Werte annehmen (nicht aber, nach [5], einen positiven und den Wert 0).

Ist schließlich $n=4$, $a=0$, so kann man $V$ in einen zweidimensionalen, isotropen, den Vektor $x$ enthaltenden und einen anderen zweidimensionalen Teilraum $W$ orthogonal zerlegen. Die Diskriminante $d$ von $W$ stimmt mit der von $V$ überein. Schließlich ist $\Theta(O^+(W))$ in $\Theta(O^+(V, x))$ enthalten[4]). Man kann nun genauso weiterschließen wie im vorigen Fall und erhält ein zu Satz 2 analoges Ergebnis. Aus der Bedingung (6) kann man hier noch eine spezielle Folgerung ziehen: $M_{\mathfrak{p}}$ hat nämlich als eigentlichen Automorphismus die Multiplikation mit $-1$ mit der Spinornorm $d$. Es folgt also $d \in N_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}(K_{\mathfrak{P}}^{\times})$ für alle $\mathfrak{p}$, also $d \in N_{K/k}(K^{\times})$, also wegen $-d = N_{K/k}(\sqrt{d})$ auch $-1 \in N_{K/k}(K^{\times})$. Umgekehrt muß daher $d$ Norm aus dem Körper $k(\sqrt{-1})$, d.h. Summe zweier Quadrate aus $k$ sein. Daß der Ausnahmefall überhaupt nicht auftreten kann, wie es den Resultaten von [9] entsprechen würde, scheint sich hier nicht zu ergeben.

[4]) Man kann sogar zeigen, daß die beiden Gruppen gleich sind.

## Literatur


[1] BLIJ, F. VAN DER: On the theory of quadratic forms. Ann. Math. **50**, 875–883 (1949).

[2] CHEVALLEY, C.: La théorie du corps de classes. Ann. Math. **41**, 394–418 (1960).

[3] EICHLER, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

[4] — Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter. Math. Z. **55**, 216–252 (1952).

[5] JONES, B. W., and G. L. WATSON: On indefinite ternary quadratic forms. Canad. J. Math. **8**, 592–608 (1956).

[6] KNESER, M.: Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen. Arch. Math. **7**, 323–332 (1956).

[7] — Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern. J. reine angew. Math. **196**, 213–220 (1956).

[8] SIEGEL, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, I, II, III. Ann. Math. **36**, 527–606 (1935); **37**, 230–263 (1936); **38**, 212–291 (1937).

[9] — Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie, I, II. Math. Ann. **124**, 17–54, 366–387 (1951).

[10] WATSON, G. L.: Integral quadratic forms. Cambridge 1960.

[11] — Representation of integers by indefinite quadratic forms. Mathematika **2**, 32–38 (1955).

[12] WEIL, A.: Adeles and algebraic groups. Lecture notes. Princeton 1961.


*München, Mathematisches Institut der Universität*

*(Eingegangen am 18. April 1961)*

# Equations différentielles opérationnelles

## et problèmes aux limites

Par Dr. J. L. Lions,
Professeur de Mathématiques, Université de Nancy

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 111)
X, 292 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 59,50; Ganzleinen DM 64,—
**In französischer Sprache**

### INHALTSÜBERSICHT

Position des problèmes · Problèmes aux limites variationnels · Une variante du Théorème des projections · Equations différentielles opérationnelles du premier ordre en $t$ (I) · Equations différentielles opérationnelles du premier ordre en $t$ (II) · Exemples (I) · Equations différentielles opérationnelles du premier ordre en $t$ (III) · Discussion générale; équations différentielles opérationnelles d'ordre supérieur en $t$ · Exemples (II) · Autres méthodes et autres équations · Problèmes aux limites variationnels vectoriels et transformation de Laplace · Quelques problèmes singuliers · Index des notations principales · Bibliographie.

### ZUR INFORMATION

Das vorliegende Buch behandelt im Sinne Hadamards gemischte Probleme bei Differentialgleichungen, und zwar sowohl den linearen wie den nichtlinearen Fall. Alle auftretenden Gleichungen fallen unter eine gemeinsame Kategorie: sie sind mit Hilfe eines Differentialoperators gebildet, der im ersten Kapitel eingeführt wird.
Ihre Theorie unterscheidet sich jedoch, je nachdem der parabolische, hyperbolische oder Schrödingersche Typus vorliegt. Jeder dieser Typen wird für sich diskutiert. Dabei werden zahlreiche Beispiele angegeben; mehr als drei Kapitel sind ausschließlich den Beispielen gewidmet. Besondere Aufmerksamkeit wird den nichtlinearen Problemen geschenkt, wie etwa den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen.
Verschiedene mögliche Lösungsmethoden werden angegeben, die Methode der Projektion oder des Energieintegrals, einige Verfahren der angenäherten Berechnung, Laplace-Transformation und Transmutationen. Zahlreiche Hinweise auf ungelöste Probleme finden sich überall im Text.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

*Vor kurzem erschien:*

# Vorlesungen über theoretische Mechanik

Von Dr. rer. nat. DIETRICH MORGENSTERN Ph. D.,
a. o. Professor an der Universität Münster/Westf.,

und Dr.-Ing. ISTVÁN SZABÓ,
o. Professor an der Technischen Universität Berlin

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Band 112)

Mit 112 Abbildungen. XII, 374 Seiten Gr.-8°. 1961. DM 64,80; Ganzleinen DM 69,—

INHALTSÜBERSICHT

Mechanik der Systeme mit endlichem Freiheitsgrad: Momentanprinzipien der Punktmechanik. Zeitintegralprinzipien der Punktmechanik. Hamilton-Jacobische Theorie im $(n+1)$-dimensionalen Raum. Hamilton-Jacobische Theorie und kanonische Transformationen im $(2n+1)$-dimensionalen Raum. Zyklische Systeme. Bewegungsgleichung des starren Körpers. Aufgaben und Probleme · Mechanik der Kontinua: Allgemeine Grundlegung. Materialgleichungen und klassische Elastizitätstheorie. Statik der klassischen Elastizitätstheorie und die Näherungstheorien der technischen Mechanik. Aufgaben und Probleme. Ideale Flüssigkeiten. Aufgaben und Probleme. Zähe Flüssigkeiten. Aufgaben und Probleme. Dynamik idealer Gase. Aufgaben und Probleme · Abriß der Geschichte der klassischen Mechanik: Der zeitliche Überblick. Entwicklung verschiedener Spezialgebiete · Formeln und Operatoren in orthogonalen Koordinaten · Literaturverzeichnis · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg
Printed in Germany